Фазы δ_l с большими l вычисляются по (124,1)

$$\delta_l = -\frac{\alpha m}{\hbar^2}\int\limits_{l/k}^{\infty}\frac{dr}{(r^2+a^2)^{n/2}(k^2-l^2/r^2)^{1/2}}.$$

Подстановкой $r^2+a^2=(a^2+l^2/k^2)/\xi$ интеграл приводится к известному интегралу Эйлера и дает

$$\delta_l = -\frac{m\alpha k^{n-2}}{2\hbar^2(a^2k^2+l^2)^{(n-1)/2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)}. \tag{2}$$

Интеграл (1) определяется областью $l \sim ak \gg 1$, чем оправдывается сделанное предположение. Вычисление интеграла приводит к результату:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{n-2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)}\right]^2\left(\frac{m\alpha}{k\hbar^2a^{n-2}}\right)^2. \tag{3}$$

Согласно (126,2) условие применимости борновского приближения в данном случае дается неравенством $m\alpha/\hbar^2ka^{n-1} \ll 1$. Обратим внимание на зависимость $\sigma \sim k^{-2}$, соответствующую сделанным в тексте общим утверждениям.

6. Найти в борновском приближении амплитуду рассеяния в двумерном случае (поле $U=U(x, z)$; поток частиц падает в направлении оси z).

Решение. Использовав примечание на стр. 198 и известное асимптотическое выражение функции Ганкеля

$$H_0^{(1)}(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\, e^{i(u-\pi/4)} \quad \text{при} \quad u \to \infty, \tag{4}$$

найдем для поправки к волновой функции на больших расстояниях ρ_0 от оси поля (ось y) выражение

$$\psi^{(1)} \approx \frac{f(\varphi)}{\sqrt{-i\rho_0}}\, e^{ik\rho_0},$$

где амплитуда рассеяния

$$f(\varphi) = -\frac{m}{\hbar^2\sqrt{2\pi k}}\int U(\rho)\, e^{-i\mathbf{q}\rho}\, d^2\rho$$

($\rho=(x, z)$ — двумерный радиус-вектор; $d^2\rho = dx\,dz$; φ — угол рассеяния в плоскости xz). В двумерном случае амплитуда рассеяния имеет размерность корня из длины, а сечение рассеяния $d\sigma = |f|^2\,d\varphi$ — размерность длины.

§ 127. Квазиклассический случай

Проследим, каким образом происходит предельный переход от квантовомеханической теории рассеяния к классической.

Исключив из рассмотрения равный нулю угол рассеяния θ, мы можем написать амплитуду рассеяния, даваемую точной теорией, в виде (124,4)

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\,e^{2i\delta_l}. \tag{127,1}$$

Мы знаем, что квазиклассические волновые функции характеризуются большой величиной их фазы. Поэтому естественно предположить заранее, что предельному переходу в теории рассеяния соответствуют большие фазы δ_l. Значение суммы (127,1) определяется в основном членами с большими l. Поэтому можно заменить $P_l(\cos\theta)$ асимптотическим выражением (49,7), которое напишем в виде

$$P_l(\cos\theta) \approx -\frac{i}{\sqrt{2\pi l\sin\theta}}\left\{\exp\left[i\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta+i\frac{\pi}{4}\right]-\right.$$
$$\left.-\exp\left[-i\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta-i\frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

Подставив это выражение в (127,1), получим

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_l\sqrt{\frac{l}{2\pi\sin\theta}}\left(\exp\left\{i\left[2\delta_l-\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{i\left[2\delta_l+\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]\right\}\right). \quad (127,2)$$

Экспоненциальные множители, рассматриваемые как функции от l, являются быстро осциллирующими функциями (поскольку их фазы велики). В связи с этим большинство членов суммы (127,2) взаимно уничтожаются. Сумма будет в основном определяться областью значений l, близких к тому, при котором показатель одной из экспонент имеет экстремум, т. е. близких к корню уравнения

$$2\frac{d\delta_l}{dl}\pm\theta=0. \quad (127,3)$$

В этой области имеется большое число членов ряда, для которых экспоненциальные множители сохраняют почти постоянные значения (показатели медленно меняются вблизи точки своего экстремума) и которые поэтому не будут взаимно уничтожаться.

Фазы δ_l в квазиклассическом случае могут быть написаны (см. § 124) как предел, к которому стремится при $r\to\infty$ разность фазы

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r}\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr$$

квазиклассической волновой функции в поле $U(r)$ и фазы волновой функции свободного движения, равной $kr-\pi l/2$ (см. § 33).

Таким образом,

$$\delta_l = \int_{r_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U) - \frac{\hbar^2 (l+1/2)^2}{r^2}} - k\right] dr + \\ + \frac{\pi}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right) - kr_0. \quad (127,4)$$

Это выражение надо подставить в уравнение (127,3). При определении производной от интеграла надо помнить, что предел интегрирования r_0 тоже зависит от l; но получающийся от этого член $k\, dr_0/dl$ сокращается с производной от члена $-kr_0$ в δ_l. Величина $\hbar(l+1/2)$ есть момент импульса частицы. В классической механике его можно написать в виде $m\rho v$, где ρ — *прицельное расстояние*, а v — скорость частицы на бесконечности.

Мы сделаем эту подстановку, после чего уравнение (127,3) примет окончательно вид

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r^2\sqrt{1-\frac{U}{E}-\frac{\rho^2}{r^2}}} = \frac{\pi \pm \theta}{2}. \quad (127,5)$$

В поле отталкивания это уравнение имеет корень (для ρ) лишь при знаке минус перед θ в правой стороне, а в поле притяжения — при знаке плюс.

Уравнение (127,5) в точности совпадает с классическим уравнением, определяющим угол рассеяния по прицельному расстоянию (см. I, § 18). Легко убедиться и в том, что и для сечения действительно получается классическое выражение.

Для этого разложим показатель экспоненты в (127,2) по степеням $l' = l - l_0(\theta)$, где $l_0(\theta)$ определяется уравнениями (127,3) — (127,5). Будем для определенности рассматривать первый член в (127,2) и соответственно принимаем нижний знак в (127,3) (случай отталкивания). Заметив, что, согласно (127,3),

$$\left.\frac{d^2\delta_l}{dl^2}\right|_{l=l_0} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dl_0},$$

имеем

$$i\left[2\delta_l - \left(l+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \approx i\left[2\delta_{l_0} - \left(l_0+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{i}{2}\frac{d\theta}{dl_0}l'^2.$$

Суммирование по l в (127,2) заменяем теперь интегрированием по dl' вблизи точки $l' = 0$. Рассматривая при этом l' как комплексную переменную, направим путь интегрирования вблизи указанной точки вдоль направления наиболее крутого спада показателя экспоненты, т. е. под углом $\pi/4$ или $-\pi/4$ к вещественной оси, в зависимости от знака $d\theta/dl_0$. Другими словами, полагаем $l' = \xi \exp(\pm i\pi/4)$ и интегрируем по вещественным значениям ξ; ввиду быстрой сходимости интеграла его можно распространить от $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\left|\frac{d\theta}{dl_0}\right|\right) d\xi = \left(2\pi\left|\frac{dl_0}{d\theta}\right|\right)^{1/2}.$$

В результате получим

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\left(\frac{l_0}{\sin\theta}\left|\frac{dl_0}{d\theta}\right|\right)^{1/2} \exp\left\{i\left[2\delta_{l_0} - \left(l_0 + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\right\}. \tag{127,6}$$

Отсюда

$$d\sigma = |f|^2 \cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta = 2\pi \frac{l_0}{k^2}\left|\frac{dl_0}{d\theta}\right| d\theta, \tag{127,7}$$

и после введения прицельного расстояния согласно $\rho = l_0/k$ мы приходим к классической формуле $d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho$.

Таким образом, условие классичности рассеяния при заданном угле θ заключается в том, чтобы было велико значение l, при котором имеет место (127,3), и чтобы было велико также и δ_l при этом значении l [1]). Это условие имеет простой смысл. Для того чтобы можно было говорить о классическом рассеянии на угол θ при пролетании частицы на прицельном расстоянии ρ, необходимо, чтобы квантовомеханические неопределенности в значениях того и другого были относительно малы: $\Delta\rho \ll \rho$, $\Delta\theta \ll \theta$. Неопределенность угла рассеяния имеет порядок величины $\Delta\theta \sim \Delta p/p$, где p — импульс частицы, а Δp — неопределенность его поперечной составляющей. Так как $\Delta p \sim \hbar/\Delta\rho \gg \hbar/\rho$, то $\Delta\theta \gg \hbar/p\rho$, а потому во всяком случае и

$$\theta \gg \frac{\hbar}{\rho m v}. \tag{127,8}$$

Заменяя момент импульса $m\rho v$ на $\hbar l$, получим $\theta l \gg 1$, что совпадает с условием $\delta_l \gg 1$ (так как $\delta_l \sim l\theta$, как это видно из (127,3)).

Классический угол отклонения частицы можно оценить как отношение поперечного приращения импульса Δp за «время столкновения» $\tau \sim \rho/v$ к первоначальному импульсу mv. Сила, действующая в поле $U(r)$ на частицу на расстоянии ρ, есть $F = -dU(\rho)/d\rho$, поэтому $\Delta p \sim F\rho/v$, так что $\theta \sim \rho F/mv^2$. Эта оценка справедлива строго лишь, если угол $\theta \ll 1$, но по порядку величины ее можно продлить и до $\theta \sim 1$. Подставив это выра-

---

[1]) Связь θ и ρ (даваемая формулой (127,5)) может оказаться неоднозначной; тогда одному и тому же значению θ отвечают более чем одно значение ρ. В таком случае амплитуда $f(\theta)$ дается суммой выражений (127,6) с соответствующими значениями l_0. В точках экстремума функции $\theta(\rho)$, производная $d\rho/d\theta$, а с нею и классическое дифференциальное сечение $d\sigma/do$ обращаются в бесконечность; вблизи этого угла классическое приближение, конечно, недостаточно (см. задачу 2).

жение в (127,8), получим условие квазиклассичности рассеяния в виде

$$|F|\rho^2 \gg \hbar v. \tag{127,9}$$

Это неравенство должно выполняться для всех значений ρ, при которых еще $|U(\rho)| \lesssim E$.

Если поле $U(r)$ убывает быстрее, чем $1/r$, то условие (127,9) во всяком случае перестает выполняться при достаточно больших ρ. Но большим ρ соответствуют малые θ; таким образом, рассеяние на достаточно малые углы во всяком случае не будет классическим. Если же поле спадает медленнее, чем $1/r$, то рассеяние на малые углы будет классическим; будет ли в этом случае классическим рассеяние на большие углы, зависит от характера хода поля на малых расстояниях.

Для кулонова поля $U = \alpha/r$ условие (127,9) выполняется, если $\alpha \gg \hbar v$. Это условие обратно тому, которое позволяет рассматривать кулоново поле как возмущение. Мы увидим, впрочем, что по случайным причинам квантовая теория рассеяния в кулоновом поле приводит к результату, совпадающему с классическим во всех случаях.

Задачи

1. Найти полное сечение квазиклассического рассеяния в поле, имеющем на достаточно больших расстояниях вид $U = \alpha/r^n$ с $n > 2$.

Решение. Имея в виду, что основную роль играют фазы δ_l с большими l, вычисляем их по формуле (124,1)

$$\delta_l = -\frac{m\alpha}{\hbar^2}\int\limits_{l/k}^{\infty}\frac{dr}{r^n\sqrt{k^2 - l^2/r^2}} = -\frac{m\alpha k^{n-2}}{2\hbar^2 l^{n-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \tag{1}$$

(вычисление интеграла — ср. задачу 5 к § 126). Заменив суммирование в (123,12) интегрированием, пишем

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\int\limits_0^{\infty} 2l\sin^2\delta_l\,dl.$$

После подстановки $\delta_l = u$ и интегрирования по du по частям интеграл приводится к Г-функции. В результате получим

$$\sigma = 2\pi^{\frac{n}{n-1}}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{n-3}{n-1}\right)\right]\Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)}\right]^{\frac{2}{n-1}}\left(\frac{\alpha}{\hbar v}\right)^{\frac{2}{n-1}} \tag{2}$$

(при $n = 3$ раскрытие неопределенности дает $\sigma = 2\pi^2\alpha/\hbar v$).

Условие применимости этого результата заключается прежде всего в том, чтобы при $\delta_l \sim 1$ было $l \gg 1$; отсюда получим неравенство

$$m\alpha k^{n-2}/\hbar^2 \gg 1.$$

Еще одно условие возникает из требования, чтобы поле $U(r)$ имело рассматриваемый вид уже на расстояниях

$$r \sim l/k \sim (m\alpha/\hbar^2 k)^{1/(n-1)}$$

(l из соотношения $\delta_l \sim 1$), которые играют основную роль в интеграле (1). Если этот вид достигается лишь на расстояниях $r \gg a$ (где a — характерные размеры поля), то отсюда возникает условие

$$m\alpha/\hbar^2 k a^{n-1} \gg 1,$$

устанавливающее верхний предел допустимых скоростей. Напомним, что в этом случае при достаточно больших скоростях (при условии $m\alpha/\hbar^2 k a^{n-1} \ll 1$) имеет место зависимость $\sigma \propto k^{-2}$ (ср. задачу 5 § 126).

2. Найти угловое распределение рассеяния вблизи точки экстремума классического угла рассеяния $\theta(\rho)$ как функции прицельного расстояния $\rho = l/k$.

Решение. Наличие экстремума функции $\theta(l)$ при некотором $l = l_0$ означает, согласно (127,3), что фаза δ_l вблизи этой точки имеет вид

$$2\delta_l \approx 2\delta_{l_0} + \theta_0 l' + \frac{\alpha}{3} l'^3,$$

где $\theta_0 = \theta(l_0)$, $l' = l - l_0$ (снова выбираем для определенности случай нижнего знака в (127,3)); постоянная $\alpha < 0$ или $\alpha > 0$ соответственно в случаях максимума или минимума функции $\theta(l)$. Для амплитуды рассеяния получаем, вместо (127,6):

$$|f(\theta)| = \frac{1}{k}\left(\frac{l_0}{2\pi \sin\theta_0}\right)^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i\left(-l'\theta' + \frac{\alpha}{3} l'^3\right)\right\} dl' \right|,$$

где $\theta' = \theta - \theta_0$. Выразив интеграл через функцию Эйри согласно (b, 3), найдем окончательно для сечения рассеяния [1])

$$d\sigma = \frac{4\pi l_0}{\alpha^{2/3} k^2} \Phi^2\left(-\frac{\theta'}{\alpha^{1/3}}\right) d\theta'.$$

Дифференциальное сечение $d\sigma/d\theta'$ затухает в глубь классически недоступной области рассеяния ($\theta' > 0$ при $\alpha < 0$ или $\theta' < 0$ при $\alpha > 0$), а по другую сторону от точки $\theta' = 0$ испытывает колебания между нулем и постепенно убывающей амплитудой. Его максимальное значение достигается при $\theta'\alpha^{-1/3} = 1{,}02$, где $\Phi^2 = 0{,}90$.

3. Найти угловое распределение квазиклассического рассеяния на малые углы, если классический угол отклонения θ обращается в нуль при некотором конечном значении $\rho = l_0/k$.

Решение. Предположенная квазиклассичность рассеяния в рассматриваемом случае означает, что $l_0 \gg 1$ и $\delta_{l_0} \gg 1$. Тогда в рассеянии существенны значения l, близкие к l_0. При малых $l' = l - l_0$ имеем

$$\delta_l \approx \delta_{l_0} + \frac{\beta}{2} l'^2$$

---

[1]) Этот тип рассеяния встречается в теории радуги, и его называют поэтому *радужным* рассеянием.

(тогда, согласно (127,3), $\theta = 0$ при $l' = 0$). Это выражение надо поставить в (127,1), причем $P_l(\cos\theta)$ может быть представлено в виде (49,6). Суммирование по l снова заменяется интегрированием по dl' вокруг точки $l' = 0$ [1]):

$$f = \frac{l_0}{ik}\exp\left(2i\delta_{l_0}\right)\int J_0(l\theta)\exp\left(i\beta l'^2\right)dl'.$$

Интеграл определяется областью $l' \sim \beta^{-1/2}$. Для углов $\theta \ll \sqrt{\beta}$ можно вынести функцию $J_0(l\theta)$ из-под знака интеграла, заменив ее значением при $l = l_0$. Оставшийся интеграл вычисляется, как объяснено в тексте. В результате находим для сечения [2])

$$d\sigma = \frac{\pi l_0^2}{\beta k^2} J_0^2(l_0\theta)\,do.$$

Аналогичный результат получается для сечения рассеяния на углы, близкие к π, если классический угол рассеяния обращается в π при некотором конечном (отличном от нуля) значении ρ.

§ 128. Аналитические свойства амплитуды рассеяния

Ряд важных свойств амплитуды рассеяния может быть установлен путем изучения ее как функции энергии рассеиваемой частицы E, формально рассматриваемой как комплексная переменная.

Рассмотрим движение частицы в поле $U(r)$, достаточно быстро обращающемся на бесконечности в нуль, — требуемая степень быстроты убывания будет указана ниже. Для упрощения последующих рассуждений будем сначала считать, что орбитальный момент частицы $l = 0$. Напишем асимптотический вид волновой функции — решения уравнения Шредингера с $l = 0$ для произвольного заданного значения E — в форме

$$\chi \equiv r\psi = A(E)\exp\left(-\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}r\right) + B(E)\exp\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}r\right), \tag{128,1}$$

и будем рассматривать E как комплексную переменную; будем при этом определять $\sqrt{-E}$ как положительную величину при вещественных отрицательных значениях E. Волновая функция предполагается нормированной каким-либо определенным условием, скажем, условием $\psi(0) = 1$.

На левой части вещественной оси ($E < 0$) экспоненциальные множители в первом и втором членах в (128,1) вещественны; один из них убывает, а другой возрастает при $r \to \infty$. Из условия вещественности χ следует, что функции $A(E)$ и $B(E)$ вещественны при $E < 0$; в свою очередь отсюда следует, что эти функции

[1]) Строго говоря, к этой амплитуде следует добавить член, отвечающий вкладу в рассеяние на малые углы от прицельных расстояний $\rho \to \infty$. Этот вклад, однако, вообще говоря, мал по сравнению с написанным.

[2]) Этот тип рассеяния называют *сиянием* в связи с определенными метеорологическими явлениями, в теории которых он встречается.