(тогда, согласно (127,3), $\theta = 0$ при $l' = 0$). Это выражение надо поставить в (127,1), причем $P_l(\cos\theta)$ может быть представлено в виде (49,6). Суммирование по l снова заменяется интегрированием по dl' вокруг точки $l' = 0$ [1]):

$$f = \frac{l_0}{ik} \exp\left(2i\delta_{l_0}\right) \int J_0(l\theta) \exp\left(i\beta l'^2\right) dl'.$$

Интеграл определяется областью $l' \sim \beta^{-1/2}$. Для углов $\theta \ll \sqrt{\beta}$ можно вынести функцию $J_0(l\theta)$ из-под знака интеграла, заменив ее значением при $l = l_0$. Оставшийся интеграл вычисляется, как объяснено в тексте. В результате находим для сечения [2])

$$d\sigma = \frac{\pi l_0^2}{\beta k^2} J_0^2(l_0\theta)\, do.$$

Аналогичный результат получается для сечения рассеяния на углы, близкие к π, если классический угол рассеяния обращается в π при некотором конечном (отличном от нуля) значении ρ.

§ 128. Аналитические свойства амплитуды рассеяния

Ряд важных свойств амплитуды рассеяния может быть установлен путем изучения ее как функции энергии рассеиваемой частицы E, формально рассматриваемой как комплексная переменная.

Рассмотрим движение частицы в поле $U(r)$, достаточно быстро обращающемся на бесконечности в нуль, — требуемая степень быстроты убывания будет указана ниже. Для упрощения последующих рассуждений будем сначала считать, что орбитальный момент частицы $l = 0$. Напишем асимптотический вид волновой функции — решения уравнения Шредингера с $l = 0$ для произвольного заданного значения E — в форме

$$\chi \equiv r\psi = A(E) \exp\left(-\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right) + B(E) \exp\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right), \tag{128,1}$$

и будем рассматривать E как комплексную переменную; будем при этом определять $\sqrt{-E}$ как положительную величину при вещественных отрицательных значениях E. Волновая функция предполагается нормированной каким-либо определенным условием, скажем, условием $\psi(0) = 1$.

На левой части вещественной оси ($E < 0$) экспоненциальные множители в первом и втором членах в (128,1) вещественны; один из них убывает, а другой возрастает при $r \to \infty$. Из условия вещественности χ следует, что функции $A(E)$ и $B(E)$ вещественны при $E < 0$; в свою очередь отсюда следует, что эти функции

[1]) Строго говоря, к этой амплитуде следует добавить член, отвечающий вкладу в рассеяние на малые углы от прицельных расстояний $\rho \to \infty$. Этот вклад, однако, вообще говоря, мал по сравнению с написанным.

[2]) Этот тип рассеяния называют *сиянием* в связи с определенными метеорологическими явлениями, в теории которых он встречается.

имеют комплексно сопряженные значения в любых двух точках, расположенных симметрично относительно вещественной оси:

$$A\,(E^*) = A^*\,(E),\quad B\,(E^*) = B^*\,(E). \tag{128,2}$$

Совершая переход с левой вещественной полуоси на правую полуось через верхнюю полуплоскость, мы получим асимптотическое выражение для волновой функции при $E > 0$ в виде

$$\chi = A\,(E)\,e^{ikr} + B\,(E)\,e^{-ikr},\qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{128,3}$$

Если же произвести переход через нижнюю полуплоскость, мы получили бы

$$\chi = A^*\,(E)\,e^{-ikr} + B^*\,(E)\,e^{ikr}.$$

Поскольку χ должна быть однозначной функцией E, это значит, что

$$A\,(E) = B^*\,(E) \text{ при } E > 0 \tag{128,4}$$

(это соотношение следует также и непосредственно из вещественности χ при $E > 0$). Однако, благодаря неоднозначности корня $\sqrt{-E}$ в (128,1), сами коэффициенты $A\,(E)$ и $B\,(E)$ неоднозначны. Для устранения этой неоднозначности разрежем комплексную плоскость вдоль правой вещественной полуоси. Наличие разреза делает однозначным $\sqrt{-E}$ и тем самым обеспечивает однозначность определения функций $A\,(E)$ и $B\,(E)$. При этом на верхнем и нижнем краях разреза эти функции имеют комплексно сопряженные значения (в выражении (128,3) $A\,(E)$ и $B\,(E)$ берутся на верхнем краю разреза).

Разрезанную указанным образом комплексную плоскость будем называть *физическим листом* римановой поверхности. Согласно принятому нами определению на всем этом листе имеем

$$\operatorname{Re}\sqrt{-E} > 0. \tag{128,5}$$

В частности, на верхнем краю разреза определенный таким образом $\sqrt{-E}$ переходит в $-i\sqrt{E}$ [1]).

В (128,3) множители e^{ikr} и e^{-ikr}, а с ними и оба члена в χ — одинакового порядка величины; асимптотическое выражение вида (128,3) поэтому всегда законно. На всем же остальном физиче-

---

[1]) Везде ниже в этом параграфе мы изучаем свойства амплитуды рассеяния на физическом листе. В дальнейшем, однако, нам придется в некоторых случаях рассматривать также и второй, *нефизический* лист римановой поверхности (см. § 134). На этом листе

$$\operatorname{Re}\sqrt{-E} < 0. \tag{128,5a}$$

Переход с правой полуоси на нефизический лист осуществляется непосредственно вниз, через разрез.

ском листе первый член в (128,1) экспоненциально затухает, а второй — возрастает при $r \to \infty$ (ввиду (128,5)). Поэтому оба члена в (128,1) оказываются различного порядка величины и это выражение, как асимптотическая форма волновой функции, может оказаться незаконным — малый член в нем на фоне большого может оказаться недопустимым превышением точности. Для законности выражения (128,1) отношение малого члена к большому не должно быть меньше относительного порядка величины потенциальной энергии (U/E), которой пренебрегают в уравнении Шредингера при переходе к асимптотической области. Другими словами, поле $U(r)$ должно удовлетворять условию: $U(r)$ убывает при $r \to \infty$ быстрее, чем

$$\exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} r \operatorname{Re}\sqrt{-E}\right). \tag{128,6}$$

Если это условие выполняется для любого $\operatorname{Re}\sqrt{-E} > 0$, т. е. если $U(r)$ убывает быстрее, чем

$$e^{-cr} \tag{128,6a}$$

с любой положительной постоянной c, асимптотическое выражение вида (128,1) справедливо на всем физическом листе. Будучи решением уравнения с конечными коэффициентами, оно не имеет особенностей по E. Это значит, что функции $A(E)$ и $B(E)$ регулярны на всем физическом листе, за исключением точки $E = 0$; последняя, будучи точкой начала разреза, является точкой разветвления этих функций.

Связанным состояниям частицы в поле $U(r)$ соответствуют волновые функции, обращающиеся при $r \to \infty$ в нуль. Это значит, что второй член в (128,1) должен отсутствовать, т. е. дискретным уровням энергии соответствуют нули функции $B(E)$. Поскольку уравнение Шредингера имеет лишь вещественные собственные значения, все нули $B(E)$ на физическом листе вещественны (и расположены на левой части вещественной оси).

Функции $A(E)$ и $B(E)$ при $E > 0$ непосредственно связаны с амплитудой рассеяния в поле $U(r)$. Действительно, сравнив (128,3) с асимптотическим выражением χ, написанным в форме (33,20)

$$\chi = \mathrm{const}\,[e^{i(kr+\delta_0)} - e^{-i(kr+\delta_0)}], \tag{128,7}$$

мы видим, что

$$-\frac{A(E)}{B(E)} = e^{2i\delta_0(E)}. \tag{128,8}$$

Амплитуда же рассеяния с моментом $l = 0$ есть, согласно (123,15),

$$f_0 = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}}\left(\frac{A}{B} + 1\right); \tag{128,9}$$

при этом A и B берутся на верхнем краю разреза.

Рассматривая теперь амплитуду рассеяния как функцию E на всем физическом листе, мы видим, что дискретные уровни энергии являются ее простыми полюсами. Если поле $U(r)$ удовлетворяет условию (128,6а), то, согласно сказанному выше, амплитуда рассеяния не имеет других особых точек [1]).

Вычислим вычет амплитуды рассеяния относительно полюса, который она имеет в каком-либо дискретном уровне $E = E_0 < 0$. Для этого напишем уравнения, которым удовлетворяют функция χ и ее производная по энергии:

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\chi = 0, \qquad \left(\frac{\partial\chi}{\partial E}\right)'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\frac{\partial\chi}{\partial E} = -\frac{2m}{\hbar^2}\chi.$$

Умножив первое на $\partial\chi/\partial E$, второе — на χ, вычтя почленно одно из другого и проинтегрировав по dr, получим

$$\chi'\frac{\partial\chi}{\partial E} - \chi\left(\frac{\partial\chi}{\partial E}\right)' = \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^r \chi^2\,dr. \tag{128,10}$$

Применим это соотношение при $E = E_0$ и $r \to \infty$. Интеграл в правой стороне равенства при $r \to \infty$ обращается в единицу, если волновая функция связанного состояния нормирована обычным условием $\int \chi^2\,dr = 1$. В левую же сторону подставляем χ из (128,1), учитывая при этом, что вблизи точки $E = E_0$

$$A(E) \approx A(E_0) \equiv A_0, \qquad B(E) \approx (E + |E_0|)\left.\frac{dB}{dE}\right|_{E=E_0} \equiv \beta(E + |E_0|).$$

В результате получим $\beta = -\frac{1}{A_0\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}$.

С помощью этих выражений найдем, что вблизи точки $E = E_0$ главный член в амплитуде рассеяния (совпадающий с амплитудой для $l = 0$) имеет следующий вид:

$$f = -\frac{\hbar^2 A_0^2}{2m}\frac{1}{E + |E_0|}. \tag{128,11}$$

Таким образом, вычет амплитуды рассеяния в дискретном уровне определяется коэффициентом A_0 в асимптотическом выражении

$$\chi = A_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m|E_0|}}{\hbar}r\right) \tag{128,12}$$

[1]) За исключением точки $E = 0$, являющейся особой ввиду указанной выше особенности функций $A(E)$ и $B(E)$. Амплитуда рассеяния, однако, остается при $E \to 0$ конечной (см. § 132). Ниже мы, для краткости, не будем каждый раз делать эту оговорку.

нормированной волновой функции соответствующего стационарного состояния.

Возвращаясь к исследованию аналитических свойств амплитуды рассеяния, рассмотрим случаи, когда условие (128,6а) не выполняется. В таких полях в выражении (128,1) лишь возрастающий член является корректной частью асимптотической формы решения уравнения Шредингера на всем физическом листе. Соответственно этому, можно по-прежнему утверждать, что функция $B(E)$ не имеет особенностей.

Функция же $A(E)$ в этих условиях может быть определена в комплексной плоскости лишь как аналитическое продолжение функции, представляющей собой коэффициент в асимптотическом выражении χ на правой вещественной полуоси, где оба члена в χ являются законными. Такое продолжение, однако, дает теперь, вообще говоря, различные результаты в зависимости от того, производится ли оно с верхней или с нижней стороны разреза.

Для достижения однозначности мы условимся определять $A(E)$ в верхней и нижней полуплоскостях как аналитические продолжения соответственно с верхней и с нижней сторон правой полуоси; разрез же при этом должен быть, вообще говоря, продолжен на всю вещественную ось. Определенная таким образом функция по-прежнему обладает свойством $A(E^*) = A^*(E)$, но, вообще говоря, не вещественна ни на правой, ни на левой части вещественной оси. Она может также в принципе обладать особенностями.

Покажем, однако, что существует тем не менее категория полей, для которых функция $A(E)$ не обладает особенностями внутри физического листа, хотя условие (128,6а) не выполняется.

Для этого будем рассматривать χ как функцию комплексного r при заданном (комплексном) значении E. При этом достаточно ограничиться значениями E в верхней полуплоскости, поскольку значения функции $A(E)$ в обеих полуплоскостях комплексно сопряжены друг с другом. Для таких значений r, при которых Er^2 есть вещественное положительное число, оба члена в волновой функции (128,1) одинакового порядка, т. е. мы возвращаемся к той ситуации, которая имеет место для $E > 0$ и вещественных r, когда оба члена в асимптотическом выражении χ законны при любом стремящемся на бесконечности к нулю поле $U(r)$. Поэтому можно утверждать, что $A(E)$ не может иметь особых точек при таких значениях E, для которых $U(r) \to 0$, когда r стремится к ∞ вдоль луча, на котором $Er^2 > 0$. Когда E пробегает все значения в верхней полуплоскости, условие $Er^2 > 0$ выделяет правый нижний квадрант плоскости комплексного r. Таким образом, мы приходим к выводу, что $A(E)$ не имеет особенностей внутри физического листа также и в случаях, когда $U(r)$ удовлетворяет условию [1])

$$U(r) \to 0, \text{ когда } r \to \infty \text{ в правой полуплоскости} \qquad (128,13)$$

(*Л. Д. Ландау*, 1961).

Условия (128,6а) и (128,13) охватывают очень широкую категорию полей. Поэтому можно сказать, что амплитуда рассеяния, как правило, не имеет особенностей внутри обеих полуплоскостей. На самой же левой полуоси (которая входит в состав физического листа при отсутствии разреза на ней) амплитуда рассеяния имеет полюсы, соответствующие энергиям связанных состояний; при наличии разреза здесь могут находиться и другие особенности.

Последнее имеет место, в частности, для полей вида

$$U = \text{const}\cdot r^n e^{-r/a} \qquad (128,14)$$

(с любым n). На отрезке $0 < -E < \hbar^2/8ma^2$ левой полуоси выполняется условие (128,6), так что на нем не должно быть разреза, и амплитуда рассеяния имеет здесь лишь полюсы, соответствующие связанным состояниям. На остальной части левой полуоси могут иметься также и *лишние* полюсы и другие особенности (*S. T. Ma*, 1946). Их появление связано с тем, что функция (128,14) перестает стремится к нулю, когда $r \to \infty$ вдоль луча, на котором $Er^2 > 0$, сразу же, как только E попадает под левую полуось (т. е. указанный луч попадает влево за минимую ось плоскости комплексного r).

Далее, рассмотрим аналитические свойства амплитуды рассеяния при $|E| \to \infty$. Когда $E \to +\infty$ вдоль вещественной оси, справедливо борновское приближение и амплитуда рассеяния стремится к нулю. Согласно сказанному выше такая же ситуация имеет место при стремлении E к бесконечности в комплексной плоскости вдоль какой-либо прямой $\arg E = \text{const}$, если при этом рассматривать такие комплексные значения r, для которых $Er^2 > 0$. Если $U \to 0$, когда $r \to \infty$ вдоль прямой $\arg r = -\frac{1}{2}\arg E$ и никаких особых точек на этой прямой $U(r)$ не имеет, то выполнено условие применимости борновского приближения и амплитуда рассеяния по-прежнему стремится к нулю. Когда $\arg E$ пробегает все значения от 0 до π, $\arg r$ пробегает значения от 0 до $-\pi/2$.

В результате мы приходим к заключению, что амплитуда рассеяния стремится к нулю на бесконечности во всех направлениях в плоскости E, если функция $U(r)$ в правой полуплос-

[1]) Ввиду вещественности $U(r)$ на вещественной оси имеет место равенство $U(r^*) = U^*(r)$; поэтому выполнение условия (128,13) в нижнем правом квадранте автоматически означает его выполнение во всей правой полуплоскости.

кости r не имеет особых точек и стремится к нулю на бесконечности.

Хотя мы говорили выше все время о рассеянии с моментом $l=0$, но в действительности все изложенные результаты справедливы и для парциальных амплитуд рассеяния с любым отличным от нуля моментом. Разница в выводах состоит лишь в том, что вместо множителей $e^{\pm ikr}$ в асимптотических выражениях χ надо было бы писать точные радиальные волновые функции свободного движения (33,16) [1].

Некоторые изменения надо ввести, при $l \neq 0$, в формулы (128,9) и (128,11). Вместо (128,7) имеем теперь

$$\chi_l = rR_l = \text{const}\cdot\left\{\exp\left[i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)\right] - \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)\right]\right\} \qquad (128,15)$$

и для парциальной амплитуды f_l (определенной согласно (123,15)) получим

$$f_l = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}}\left[(-1)^l \frac{A}{B} + 1\right]. \qquad (128,16)$$

Главный же член в амплитуде рассеяния вблизи уровня $E=E_0$ с моментом l дается, вместо (128,11), формулой

$$f \approx (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) = (-1)^{l+1}\frac{\hbar^2 A_0^2}{2m}\frac{1}{E+|E_0|}(2l+1)P_l(\cos\theta). \qquad (128,17)$$

§ 129. Дисперсионное соотношение

В предыдущем параграфе мы изучали аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния с заданными значениями l. Мы видели, что эти свойства осложняются возможностью появления «лишних» особенностей и нерегулярности на бесконечности. Такими же свойствами обладает, очевидно, и полная амплитуда, рассматриваемая как функция энергии при заданных значениях угла рассеяния. Исключение представляет, однако, амплитуда рассеяния на угол нуль. Как мы сейчас покажем, ее аналитические свойства значительно проще.

---

[1] Пользоваться же предельной формой (33,17) этих функций допустимо лишь при $E>0$; в остальной плоскости E, где оба члена в χ — различных порядков величины, использование этих предельных выражений внесло бы в χ ошибку, вообще говоря, бо́льшую, чем ошибка, соответствующая пренебрежению U в уравнении Шредингера.