кости r не имеет особых точек и стремится к нулю на бесконечности.

Хотя мы говорили выше все время о рассеянии с моментом $l=0$, но в действительности все изложенные результаты справедливы и для парциальных амплитуд рассеяния с любым отличным от нуля моментом. Разница в выводах состоит лишь в том, что вместо множителей $e^{\pm ikr}$ в асимптотических выражениях χ надо было бы писать точные радиальные волновые функции свободного движения (33,16) [1]).

Некоторые изменения надо ввести, при $l \neq 0$, в формулы (128,9) и (128,11). Вместо (128,7) имеем теперь

$$\chi_l = rR_l = \mathrm{const}\cdot\left\{\exp\left[i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)\right]\right\} \qquad (128,15)$$

и для парциальной амплитуды f_l (определенной согласно (123,15)) получим

$$f_l = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}}\left[(-1)^l \frac{A}{B} + 1\right]. \qquad (128,16)$$

Главный же член в амплитуде рассеяния вблизи уровня $E = E_0$ с моментом l дается, вместо (128,11), формулой

$$f \approx (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) = (-1)^{l+1}\frac{\hbar^2 A_0^2}{2m}\frac{1}{E+|E_0|}(2l+1)P_l(\cos\theta). \qquad (128,17$$

§ 129. Дисперсионное соотношение

В предыдущем параграфе мы изучали аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния с заданными значениями l. Мы видели, что эти свойства осложняются возможностью появления «лишних» особенностей и нерегулярности на бесконечности. Такими же свойствами обладает, очевидно, и полная амплитуда, рассматриваемая как функция энергии при заданных значениях угла рассеяния. Исключение представляет, однако, амплитуда рассеяния на угол нуль. Как мы сейчас покажем, ее аналитические свойства значительно проще.

---

[1]) Пользоваться же предельной формой (33,17) этих функций допустимо лишь при $E > 0$; в остальной плоскости E, где оба члена в χ — различных порядков величины, использование этих предельных выражений внесло бы в χ ошибку, вообще говоря, бо́льшую, чем ошибка, соответствующая пренебрежению U в уравнении Шредингера.

Написав уравнение Шредингера для волновой функции рассеиваемой частицы в виде

$$\Delta\psi + k^2\psi = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi, \tag{129,1}$$

будем рассматривать его формальным образом как волновое уравнение с правой частью, т. е. как известное из электродинамики уравнение запаздывающих потенциалов.

Решение этого уравнения, описывающее «излучение» в некотором направлении $\mathbf{k}'$ на больших расстояниях R_0 от центра, имеет, как известно, следующий вид (см. II, § 66):

$$\psi_{\text{расс}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int \frac{2mU}{\hbar^2}\psi e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\,dV. \tag{129,2}$$

В данном случае это выражение представляет собой волновую функцию рассеянной частицы и коэффициент при e^{ikR_0}/R_0 есть амплитуда рассеяния $f(\theta, E)$. В частности, положив $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор падающей частицы), получим амплитуду рассеяния на угол 0:

$$f(0, E) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U\psi e^{-ikz}\,dV \tag{129,3}$$

(ось z направлена вдоль $\mathbf{k}$). Это выражение имеет, конечно, лишь формальный смысл, поскольку в подынтегральное выражение снова входит неизвестная волновая функция. Оно позволяет, однако, сделать определенные заключения об аналитических свойствах величины $f(0, E)$ как функции энергии E [1]).

Функция ψ под знаком интеграла состоит при больших r из двух частей — падающей и расходящейся волн. Последняя пропорциональна e^{ikr}, так что соответствующая часть интеграла содержит в подынтегральном выражении $e^{ik(r-z)}$. С другой стороны, при переходе в комплексную плоскость (с верхнего края разреза вдоль правой полуоси) ik заменяется на $-\sqrt{-2mE}/\hbar$, причем на всем физическом листе $\mathrm{Re}\sqrt{-E} > 0$. Поскольку $r \geqslant z$, то $\mathrm{Re}\,[ik(r-z)] \leqslant 0$ и интеграл сходится при любом комплексном E. Что касается падающей волны в ψ, пропорциональной e^{ikz}, то в соответствующей части интеграла экспоненциальные множители вообще сокращаются, так что и эта часть сходится.

Функция ψ в интеграле (129,3) однозначно определена при любом комплексном E как решение уравнения Шредингера, содержащее, помимо плоской волны, лишь затухающую (при $r \to \infty$) часть. Поэтому однозначно определен и весь сходящийся интеграл (129,2), так что его особенности могут возникать только

---

[1]) Подразумевается, конечно, что поле $U(r)$ убывает при $r \to \infty$ достаточно быстро для того, чтобы $f(0, E)$ (при $E > 0$) вообще существовало (см. § 124).

в результате обращения ψ в бесконечность. Последнее имеет место в дискретных уровнях энергии [1]).

Легко видеть также, что $f(0, E)$ остается конечной при $|E| \to \infty$. При больших $|E|$ в уравнении Шредингера (129,1) можно пренебречь членом с U, так что в ψ остается лишь плоская волна: $\psi \sim e^{ikz}$. В результате интеграл (129,2) переходит в

$$f(0, \infty) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U\,dV,$$

что совпадает, как и следовало, с борновской амплитудой (126,4) рассеяния на угол 0 ($q = 0$); обозначим ее посредством $f_B(0)$.

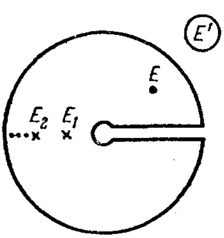

Рис. 46

Таким образом, мы приходим к выводу, что амплитуда рассеяния на угол 0 регулярна на всем физическом листе (в том числе на бесконечности), за исключением лишь обязательных полюсов на левой вещественной полуоси в дискретных уровнях энергии [2]).

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(0, E') - f_B}{E' - E}\,dE', \qquad (129,4)$$

взятый по изображенному на рис. 46 контуру, состоящему из бесконечно удаленной окружности и обхода вокруг разреза вдоль правой полуоси. Интеграл по окружности обращается в нуль, поскольку $f(0, \infty) - f_B = 0$. Интегрирование же по обеим сторонам разреза дает

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0, E')}{E' - E}\,dE';$$

здесь учтено, что по принятому в § 128 определению физическая амплитуда рассеяния для вещественных положительных значе-

[1]) Во избежание недоразумений подчеркнем, что здесь идет речь о полной волновой функции системы ψ, нормированной условием равенства единице коэффициента при плоской волне в ее асимптотическом выражении (ср. (123,3)). В предыдущем же параграфе рассматривались части (ψ_l) волновой функции, отвечающие определенным значениям l, причем ψ_l предполагались нормированными каким-либо произвольным условием. Если разложить полную функцию ψ по функциям ψ_l, то последние войдут в ψ с коэффициентами, пропорциональными $1/B_l$; так, функция (128,3) с $l = 0$ должна войти в ψ в виде

$$\frac{\mathrm{const}}{r}\frac{1}{B}\left[(A + B)e^{ikr} - 2iB\sin kr\right].$$

Поэтому ψ обращается в бесконечность в нулях функций $B_l(E)$, т. е. в дискретных уровнях энергии.

[2]) Идея изложенного доказательства принадлежит *Л. Д. Фаддееву* (1958).

ний E задается на верхней стороне разреза, а на нижней стороне имеет комплексно сопряженное значение.

С другой стороны, согласно теореме Коши интеграл (129,4) равен сумме $f(0, E) - f_B$ и вычетов R_n подынтегрального выражения во всех полюсах $E' = E_n$ функции $f(0, E')/(E' - E)$, где E_n — дискретные уровни энергии; эти вычеты определяются с помощью формулы (128,17) и равны

$$R_n = \frac{d_n}{E_n - E}, \qquad d_n = -(-1)^{l_n}(2l_n + 1)\frac{\hbar^2 A_{0n}^2}{2m} \tag{129,5}$$

(l_n — момент состояния с энергией E_n).

Таким образом, получаем

$$f(0, E) = f_B + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0, E')}{E' - E}\, dE' + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n}. \tag{129,6}$$

Это так называемое *дисперсионное соотношение* определяет $f(0, E)$ в любой точке физического листа по значениям ее мнимой части при $E > 0$ (*D. Wong*, 1957; *N. N. Khuri*, 1957).

Когда точка E устремляется к верхней стороне разреза, интеграл вдоль вещественной оси в (129,6) должен быть взят, обходя полюс $E' = E$ снизу; если произвести этот обход по бесконечно малой полуокружности (рис. 47), то соответствующая часть интеграла даст в правой стороне уравнения (129,6) величину $i \operatorname{Im} f(0, E)$, а остающийся интеграл от 0 до ∞ должен

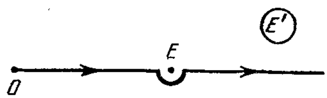

Рис. 47

пониматься в смысле главного значения. В результате получим формулу

$$\operatorname{Re} f(0, E) = f_B + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0; E')}{E' - E}\, dE' + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n}, \tag{129,7}$$

определяющую при $E > 0$ вещественную часть амплитуды рассеяния на угол 0 через ее мнимую часть. Напомним, что последняя, согласно (125,9), непосредственно связана с полным сечением рассеяния.

§ 130. Амплитуда рассеяния в импульсном представлении

В понятии об амплитуде рассеяния фигурируют только направления начального и конечного импульсов рассеиваемой частицы. Естественно поэтому, что к этому понятию можно прийти и при