ний E задается на верхней стороне разреза, а на нижней стороне имеет комплексно сопряженное значение.

С другой стороны, согласно теореме Коши интеграл (129,4) равен сумме $f(0, E) - f_B$ и вычетов R_n подынтегрального выражения во всех полюсах $E' = E_n$ функции $f(0, E')/(E' - E)$, где E_n — дискретные уровни энергии; эти вычеты определяются с помощью формулы (128,17) и равны

$$R_n = \frac{d_n}{E_n - E}, \qquad d_n = -(-1)^{l_n}(2l_n + 1)\frac{\hbar^2 A_{0n}^2}{2m} \tag{129,5}$$

(l_n — момент состояния с энергией E_n).

Таким образом, получаем

$$f(0, E) = f_B + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0, E')}{E' - E}\,dE' + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n}. \tag{129,6}$$

Это так называемое *дисперсионное соотношение* определяет $f(0, E)$ в любой точке физического листа по значениям ее мнимой части при $E > 0$ (*D. Wong*, 1957; *N. N. Khuri*, 1957).

Когда точка E устремляется к верхней стороне разреза, интеграл вдоль вещественной оси в (129,6) должен быть взят, обходя полюс $E' = E$ снизу; если произвести этот обход по бесконечно малой полуокружности (рис. 47), то соответствующая часть интеграла даст в правой стороне уравнения (129,6) величину $i \operatorname{Im} f(0, E)$, а остающийся интеграл от 0 до ∞ должен

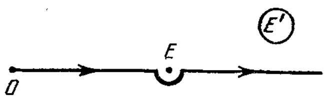

Рис. 47

пониматься в смысле главного значения. В результате получим формулу

$$\operatorname{Re} f(0, E) = f_B + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(0; E')}{E' - E}\,dE' + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n}, \tag{129,7}$$

определяющую при $E > 0$ вещественную часть амплитуды рассеяния на угол 0 через ее мнимую часть. Напомним, что последняя, согласно (125,9), непосредственно связана с полным сечением рассеяния.

§ 130. Амплитуда рассеяния в импульсном представлении

В понятии об амплитуде рассеяния фигурируют только направления начального и конечного импульсов рассеиваемой частицы. Естественно поэтому, что к этому понятию можно прийти и при формулировке задачи о рассеянии в импульсном представлении, где вопрос о пространственном распределении всей картины процесса вообще не ставится. Покажем, как это делается.

Прежде всего преобразуем к импульсному представлению исходное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}) + [U(\mathbf{r}) - E]\,\psi(\mathbf{r}) = 0, \tag{130,1}$$

перейдя от координатных волновых функций к импульсным, т. е. к фурье-компонентам

$$a(\mathbf{q}) = \int \psi(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV. \tag{130,2}$$

Обратно

$$\psi(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{130,3}$$

Умножим уравнение (130,1) на $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ и проинтегрируем его по dV. В первом члене после двукратного интегрирования по частям получим

$$\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, \Delta\psi(\mathbf{r})\, dV = \int \psi(\mathbf{r})\, \Delta e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV = -\mathbf{q}^2 a(\mathbf{q}).$$

Во втором члене, подставив в него $\psi(\mathbf{r})$ в виде (130,3), получим

$$\int U(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV = \int\int U(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} a(\mathbf{q}')\, e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}}\, dV \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} = \int U(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\, a(\mathbf{q}') \frac{d^3q'}{(2\pi)^3},$$

где $U(\mathbf{q})$ — фурье-компонента поля $U(\mathbf{r})$ [1]:

$$U(\mathbf{q}) = \int U(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV.$$

Таким образом, уравнение Шредингера в импульсном представлении принимает вид

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - E\right) a(\mathbf{q}) + \int U(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\, a(\mathbf{q}') \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} = 0. \tag{130,4}$$

Обратим внимание на то, что это уравнение — интегральное, а не дифференциальное.

Представим волновую функцию, описывающую рассеяние частиц с импульсом $\hbar\mathbf{k}$, в виде

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{130,5}$$

где $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — функция, имеющая асимптотически (при $r \to \infty$) вид расходящейся сферической волны. Ее фурье-компонента

$$a_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \tag{130,6}$$

[1]) Для удобства обозначений пишем $\mathbf{q}$ в виде аргумента фурье-компоненты вместо индекса.

и подстановка в (130,4) приводит к следующему уравнению для функции $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ [1]:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(k^2-q^2)\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + \int U(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}')\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}. \qquad (130,7)$$

Это уравнение целесообразно преобразовать, введя вместо $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ другую неизвестную функцию, согласно определению,

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{F(\mathbf{k},\ \mathbf{q})}{q^2-k^2-i0}. \qquad (130,8)$$

Тем самым устраняется особенность при $q^2 = k^2$ в коэффициентах уравнения (130,7) и оно принимает вид

$$F(\mathbf{k},\ \mathbf{q}) = -U(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \frac{2m}{\hbar^2}\int\frac{U(\mathbf{q}-\mathbf{q}')F(\mathbf{k},\ \mathbf{q}')}{q'^2-k^2-i0}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}. \qquad (130,9)$$

Член $i0$ (обозначающий предел $i\delta$ при $\delta\to+0$) введен в определение (130,8) для придания определенного смысла интегралу в (130,9): им устанавливается способ обхода полюса $q'^2 = k^2$ (ср. § 43). Покажем, что именно такой способ обхода отвечает требуемому асимптотическому виду функции

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}\int\frac{F(\mathbf{k},\ \mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{q^2-k^2-i0}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \qquad (130,10)$$

Для этого пишем $d^3q = q^2\,dq\,do_{\mathbf{q}}$ и производим прежде всего интегрирование по $do_{\mathbf{q}}$ — по направлениям вектора $\mathbf{q}$ относительно $\mathbf{r}$. Интегрирование такого вида уже производилось при преобразовании первого члена в (125,2); оно приводит (в области больших r) к выражению

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{2\pi i}{r}\int_0^\infty\frac{F(\mathbf{k},\ q\mathbf{n}')e^{iqr} - F(\mathbf{k},\ -q\mathbf{n}')e^{-iqr}}{q^2-k^2-i0}\frac{q\,dq}{(2\pi)^3}$$

(где $\mathbf{n}' = \mathbf{r}/r$) или

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -\frac{im}{2\pi^2\hbar^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\mathbf{k},\ q\mathbf{n}')e^{iqr}q\,dq}{q^2-k^2-i0}.$$

Подынтегральное выражение имеет полюсы в точках $q = k + i0$ и $q = -k - i0$, которые обходятся при интегрировании (в плоскости комплексного q) соответственно снизу и сверху (рис. 48, *а*). Сместим несколько путь интегрирования в верхнюю полуплоскость, заменив его прямой линией, параллельной

---

[1] По свойствам δ-функции произведение $(q^2-k^2)\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k})$, будучи умножено на произвольную функцию $f(\mathbf{q})$ (не имеющую особенности при $\mathbf{q}=\mathbf{k}$) и проинтегрировано по d^3q, дает нуль. В этом смысле произведение $(q^2-k^2)\times\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}) \equiv 0$.

вещественной оси и замкнутой петлей, охватывающей полюс $q=k$ (рис. 48, *б*). Интеграл по прямой линии обращается при $r\to\infty$ в нуль (ввиду наличия в подынтегральном выражении множителя $\exp(-r\,\mathrm{Im}\,q)$), а интеграл по замкнутой петле определяется вычетом подынтегрального выражения в полюсе $q=k$ (умноженным на $2\pi i$); окончательно находим

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}F(k\mathbf{n},\ k\mathbf{n}') \qquad (130{,}11)$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Мы получили требуемый асимптотический вид волновой функции, причем амплитуда рассеяния

$$f(\mathbf{n},\ \mathbf{n}') = \frac{m}{2\pi\hbar^2}F(k\mathbf{n},\ k\mathbf{n}'). \qquad (130{,}12)$$

Таким образом, амплитуда рассеяния определяется значением при $q=k$ функции $F(\mathbf{k},\ \mathbf{q})$, удовлетворяющей интегральному уравнению (130,9).

Рис. 48

В случае применимости теории возмущений уравнение (130,9) легко решается последовательными итерациями. В первом приближении, опустив интегральный член вовсе, получим $F(\mathbf{k},\mathbf{q}) = -U(\mathbf{q}-\mathbf{k})$. В следующем приближении подставляем в интегральный член выражение $F(\mathbf{k},\ \mathbf{q})$ первого приближения; для амплитуды рассеяния (130,12) находим тогда (несколько изменив обозначения переменных)

$$f(\mathbf{n},\ \mathbf{n}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\{U(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int\frac{U(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\,U(\mathbf{k}''-\mathbf{k})}{k^2-k''^2+i0}\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\right\}, \qquad (130{,}13)$$

причем $\mathbf{k}=k\mathbf{n}$, $\mathbf{k}'=k\mathbf{n}'$. Первый член совпадает с формулой (126,4) первого борновского приближения, а второй дает вклад второго приближения в амплитуду рассеяния [1]).

Из (130,13) видно упомянутое уже в § 126 обстоятельство, что уже во втором приближении амплитуда рассеяния теряет свойство симметрии (126,8). На первый взгляд может показаться, что интегральный член в (130,13) тоже симметричен по отноше-

[1]) Этот результат легко получить, конечно, и без перехода к импульсному представлению: тот факт, что формула второго приближения отличается от формулы первого приближения заменой $U(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$ на выражение в фигурных скобках в (130,13), очевиден из сравнения формул (43,1) и (43,6).

нию к перестановке начального и конечного состояний. В действительности, однако, такая симметрия отсутствует в связи с тем, что при переходе к комплексно сопряженному выражению меняется контур интегрирования (направление обхода полюса).

§ 131. Рассеяние при больших энергиях

Если потенциальная энергия не мала по сравнению с $\hbar^2/ma^2$ (где a, как обычно, радиус действия поля), то возможна ситуация, когда энергия рассеиваемых частиц настолько велика, что

$$|U| \ll E \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}(ka)^2, \tag{131,1}$$

но в то же время еще

$$|U| \gtrsim \frac{\hbar^2}{ma^2} ka = \frac{\hbar v}{a}; \tag{131,2}$$

при этом подразумевается, разумеется, что

$$ka \gg 1. \tag{131,3}$$

В таком случае мы имеем дело с рассеянием быстрых частиц, к которому, однако, неприменимо борновское приближение (не выполняется ни одно из условий (126,1) — (126,2)).

Для исследования этого случая можно воспользоваться выражением волновой функции в виде (45,9)

$$\psi = e^{ikz}F(\mathbf{r}), \qquad F(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} U\,dz\right), \tag{131,4}$$

для применимости которого энергия должна удовлетворять только условию $|U| \ll E$.

В § 45 было отмечено, что это выражение справедливо лишь при $z \ll ka^2$; поэтому оно не может быть непосредственно продолжено до таких расстояний, где уже справедливо асимптотическое выражение (123,3). В этом, однако, нет необходимости: для вычисления амплитуды рассеяния достаточно знать волновую функцию на расстояниях z таких, что $a \ll z \ll ka^2$; при этом интеграл в показателе в $F(\mathbf{r})$ может быть распространен до ∞:

$$\psi = e^{ikz}S(\boldsymbol{\rho}), \tag{131,5}$$

где введено обозначение

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \exp[2i\delta(\boldsymbol{\rho})], \qquad \delta(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U\,dz \tag{131,6}$$

($\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор в плоскости xy).