нию к перестановке начального и конечного состояний. В действительности, однако, такая симметрия отсутствует в связи с тем, что при переходе к комплексно сопряженному выражению меняется контур интегрирования (направление обхода полюса).

§ 131. Рассеяние при больших энергиях

Если потенциальная энергия не мала по сравнению с $\hbar^2/ma^2$ (где a, как обычно, радиус действия поля), то возможна ситуация, когда энергия рассеиваемых частиц настолько велика, что

$$|U| \ll E \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}(ka)^2, \tag{131,1}$$

но в то же время еще

$$|U| \gtrsim \frac{\hbar^2}{ma^2} ka = \frac{\hbar v}{a}; \tag{131,2}$$

при этом подразумевается, разумеется, что

$$ka \gg 1. \tag{131,3}$$

В таком случае мы имеем дело с рассеянием быстрых частиц, к которому, однако, неприменимо борновское приближение (не выполняется ни одно из условий (126,1) — (126,2)).

Для исследования этого случая можно воспользоваться выражением волновой функции в виде (45,9)

$$\psi = e^{ikz} F(\mathbf{r}), \qquad F(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} U\,dz\right), \tag{131,4}$$

для применимости которого энергия должна удовлетворять только условию $|U| \ll E$.

В § 45 было отмечено, что это выражение справедливо лишь при $z \ll ka^2$; поэтому оно не может быть непосредственно продолжено до таких расстояний, где уже справедливо асимптотическое выражение (123,3). В этом, однако, нет необходимости: для вычисления амплитуды рассеяния достаточно знать волновую функцию на расстояниях z таких, что $a \ll z \ll ka^2$; при этом интеграл в показателе в $F(\mathbf{r})$ может быть распространен до ∞:

$$\psi = e^{ikz} S(\boldsymbol{\rho}), \tag{131,5}$$

где введено обозначение

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \exp[2i\delta(\boldsymbol{\rho})], \qquad \delta(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U\,dz \tag{131,6}$$

($\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор в плоскости xy).

Рассеяние быстрых частиц происходит в основном на малые углы, которые мы и будем рассматривать. При этом изменение импульса $\hbar\mathbf{q}$ относительно мало ($q \ll k$), и потому вектор $\mathbf{q}$ можно считать перпендикулярным к волновому вектору падающей частицы $\mathbf{k}$, т. е. лежащим в плоскости xy. Рассеянная волна получается вычитанием из (131,5) падающей волны e^{ikz} (функция (131,4) при $z = -\infty$). Амплитуда же рассеяния с волновым вектором $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ пропорциональна соответствующей компоненте Фурье рассеянной волны [1])

$$f \propto \int [S(\rho) - 1]\, e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho$$

($d^2\rho = dx\, dy$). Коэффициент пропорциональности в этом выражении можно получить затем сравнением с предельным случаем борновского приближения (см. ниже).

Можно провести вычисление также и другим способом, который сразу приводит к вполне определенному выражению. Для этого воспользуемся формулой (129,2), подставив в нее ψ из (131,4). Заметив при этом, что, согласно (45,8),

$$\frac{2m}{\hbar^2} UF = 2ik\frac{\partial F}{\partial z},$$

получим для амплитуды рассеяния (коэффициент при e^{ikR_0}/R_0)

$$f = \frac{k}{2\pi i}\int \frac{\partial F}{\partial z} e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{2\pi i}\int [F(z=\infty) - F(z=-\infty)]\, e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, dx\, dy.$$

Подставив выражение для F, окончательно получим [2])

$$f = \frac{k}{2\pi i}\int [S(\rho) - 1]\, e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho. \tag{131,7}$$

Если энергия настолько велика, что $\delta \sim |U|a/\hbar v \ll 1$, то применимо борновское приближение. Действительно, разложив $S - 1 \approx 2i\delta$, получим из (131,7) в согласии с (126,4)

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U\, e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho\, dz.$$

---

[1]) Такой способ определения амплитуды рассеяния аналогичен методу, применяемому при рассмотрении дифракции Фраунгофера (см. II, § 61). Заметим, что именно дифракционные эффекты нарушают применимость формулы (131,4) при $z \gtrsim ka^2$.

[2]) В двумерном случае амплитуда рассеяния в поле $U(x, z)$, определенная как в задаче к § 123, дается формулой

$$f = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int [S(x) - 1]\, e^{-iqx}\, dx. \tag{131,7a}$$

Величина $|f|^2 d\varphi$ есть сечение рассеяния, отнесенное к единице длины вдоль оси y, а φ — угол рассеяния в плоскости xz (ср. выражение для борновской амплитуды в задаче 6 § 126).

Воспользовавшись оптической теоремой (125,9), можно получить из (131,7) полное сечение рассеяния. Амплитуда рассеяния на нулевой угол есть значение f при $\mathbf{q} = 0$. Поэтому находим

$$\sigma = \int 2\,\mathrm{Re}\,(1 - S)\,d^2\rho = \int 4\sin^2\delta(\rho)\,d^2\rho. \tag{131,8}$$

Выражение под знаком интеграла можно рассматривать как сечение рассеяния для частиц с прицельным расстоянием в интервале $d^2\rho$ [1]).

Формула (131,7) не предполагает центральной симметрии поля. Поучительно увидеть, каким образом для центрально-симметричного поля эта формула может быть получена непосредственно из точной общей формулы (123,11).

В условиях (131,1) — (131,3) основную роль в рассеянии играют парциальные амплитуды с большими моментами l. Поэтому для волновых функций выполняется условие квазиклассичности, что позволяет воспользоваться для δ_l формулой (124,1). Положив в ней $r_0 \approx l/k$, $r^2 = z^2 + l^2/k^2$, получим

$$\delta_l \approx -\frac{m}{\hbar^2}\int\limits_{l/k}^{\infty}\frac{U(r)\,dr}{\sqrt{k^2 - l^2/r^2}} = -\frac{m}{\hbar^2 k}\int\limits_0^{\infty} U\left(\sqrt{z^2 + l^2/k^2}\right)dz,$$

что совпадает со значением функции $\delta(\rho)$ (131,6) при $\rho = l/k$ [2]). Далее, в области малых углов ($\theta \ll 1$) полиномы Лежандра с большими l могут быть представлены в виде (49,6)

$$P_l(\cos\theta) \approx J_0(\theta l) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\theta l\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Подставив это выражение в формулу (123,11) и перейдя в ней

[1]) В § 152 будет дано обобщение формул (131,7), (131,8) на случай рассеяния на системе частиц.

[2]) Квазиклассическая функция $2\hbar\delta(\rho)$ представляет собой связанное с полем U изменение действия при пролетании частицы вдоль классической траектории. Для быстрой частицы эту траекторию можно считать прямолинейной, и тогда $2\delta(\rho)$ совпадает с разностью классических интегралов действия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}U}\,dz - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k\,dz \approx -\frac{m}{\hbar^2 k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U\,dz.$$

В этом смысле функция $2\delta(\rho)$ играет здесь роль, аналогичную роли эйконала в геометрической оптике. В связи с этим рассматриваемое приближение в теории рассеяния часто называют *эйкональным*. Подчеркнем, однако, что амплитуда рассеяния отнюдь не сводится к своему квазиклассическому выражению, поскольку не выполняются, вообще говоря, условия $\theta l \gg 1$, $\delta_l \gg 1$.

от суммирования (по большим l) к интегрированию, получим

$$f = \frac{1}{\pi}\int\int_0^{2\pi} f_l e^{-i\theta l\cos\varphi}\,d\varphi\cdot l\,dl = \frac{k^2}{\pi}\int f_l e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\,d^2\rho, \qquad (131,9)$$

где $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\rho}$ — двумерные векторы с абсолютными величинами $q = k\theta$, $\rho = l/k$. Наконец, подставив сюда f_l в виде (123,15) с $\delta_l = \delta(l/k)$, мы вернемся к формуле (131,7).

Отметим также, что для рассеяния в центрально-симметричном поле формула (131,7), после проведения в ней интегрирования по полярному углу φ в плоскости xy ($d^2\rho = \rho\,d\rho\,d\varphi$), принимает вид

$$f = -ik\int \{\exp[2i\delta(\rho)] - 1\}\,J_0(q\rho)\,\rho\,d\rho. \qquad (131,10)$$

В § 126 уже было указано, что борновское приближение неприменимо при рассеянии быстрых частиц на большие углы, если сечение при этом оказывается экспоненциально малым. Непригодна в этих условиях также и изложенная здесь методика. В действительности мы имеем в таких случаях дело с квазиклассической ситуацией, к которой теория возмущений неприменима.

В соответствии с общими правилами квазиклассического приближения (ср. § 52, 53) показатель степени в экспоненциальном законе убывания сечений рассеяния можно определить путем рассмотрения «комплексных траекторий» в классически недоступной области движения [1]).

В классической задаче о рассеянии зависимость между углом θ отклонения частицы в поле $U(r)$ и прицельным параметром ρ определяется формулой

$$\frac{\pi\pm\theta}{2} = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{U}{E}}}, \qquad (131,11)$$

где r_0 — минимальное расстояние от центра, являющееся корнем уравнения

$$1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{U}{E} = 0 \qquad (131,12)$$

(см. (127,5)). Интересующий нас случай соответствует области углов, на которые классическая частица не могла бы отклониться [2]). Этим углам отвечают поэтому комплексные решения $\rho(\theta)$ уравнения (131,11) (с соответственно комплексными значениями r_0).

[1]) Исследование вопроса о предэкспоненциальном множителе в этом законе — см. *А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, И. М. Халатников*, ЖЭТФ **45**, 989 (1963).

[2]) Излагаемый метод применим не только при больших E, но вообще во всех случаях экспоненциально малого рассеяния.

По найденной таким образом функции $\rho(\theta)$ и классическому орбитальному моменту частицы $mv\rho$ вычисляется действие

$$S(\theta) = mv\int \rho(\theta)\, d\theta \tag{131,13}$$

(где v — скорость частицы на бесконечности). Амплитуда же рассеяния

$$f \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Im} S(\theta)\right). \tag{131,14}$$

Уравнение (131,12) имеет, вообще говоря, более чем один комплексный корень. В качестве r_0 в (131,11) должен быть взят тот из них, который приводит к наименьшей по величине положительной мнимой части $\operatorname{Im} S$. Кроме того, если функция $U(r)$ обладает комплексными особыми точками, то они тоже должны входить в число конкурирующих значений r_0 [1]).

Основную роль в интеграле (131,11) играет область $r \sim r_0$. При этом в случае больших энергий E член U/E под знаком корня может быть опущен; произведя интегрирование, получим тогда

$$\rho = r_0 \cos\frac{\theta}{2}. \tag{131,15}$$

Если r_0 есть особая точка функции $U(r)$, она зависит лишь от свойств поля, но не от ρ или E. Вычисляя S согласно (131,13), найдем в этом случае, что амплитуда рассеяния

$$f \sim \exp\left(-\frac{2mv}{\hbar}\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{Im} r_0\right). \tag{131,16}$$

Если же в качестве r_0 приходится взять корень уравнения (131,12), то вид экспоненты зависит от конкретных свойств поля. Так, для функции

$$U = U_0 e^{-(r/a)^2}$$

(не имеющей вовсе особых точек на конечных расстояниях) из уравнения

$$\frac{U}{E} = 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \approx \sin^2\frac{\theta}{2}$$

имеем

$$r_0 \approx ia\sqrt{\ln\left(\frac{E}{U_0}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}. \tag{131,17}$$

Ввиду слабости зависимости от θ r_0 можно считать постоянным при интегрировании в (131,13) и для амплитуды рассеяния мы получим формулу (131,16) с r_0 из (131,17).

---

[1]) Напомним (см. § 126), что если $U(r)$ имеет особенность при вещественном r, то убывание сечения происходит вообще не по экспоненциальному закону.

Задачи

1. Определить полное сечение рассеяния сферической прямоугольной потенциальной ямой радиуса a и глубины U_0 при условии (131,1): $U_0 \ll \hbar^2k^2/m$.

Решение. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} U\,dz = -2U_0\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

Согласно (131,7) амплитуда рассеяния вперед ($\mathbf{q}=0$)

$$f(0) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^a \left[\exp\left(\frac{2iU_0}{\hbar v}\sqrt{a^2-\rho^2}\right)-1\right]2\pi\rho\,d\rho =$$

$$= -ika^2\int_0^1 \left(e^{2i\nu x}-1\right)x\,dx = \frac{ka^2}{2}\left[i-\frac{e^{2i\nu}}{\nu}-\frac{i}{2\nu^2}\left(e^{2i\nu}-1\right)\right],$$

где $\nu = U_0a/\hbar v$ — «борновский параметр». С помощью оптической теоремы (125,9) находим отсюда полное сечение

$$\sigma = 2\pi a^2\left[1+\frac{1}{2\nu^2}-\frac{\sin 2\nu}{\nu}-\frac{\cos 2\nu}{2\nu^2}\right].$$

В предельном (борновском) случае $\nu \ll 1$ это выражение дает $\sigma = 2\pi a^2\nu^2$ в согласии с задачей 1 § 126. В обратном предельном случае $\nu \gg 1$ имеем просто $\sigma = 2\pi a^2$, т. е. удвоенное геометрическое сечение. Этот последний результат имеет простой смысл. При $\nu \gg 1$ все частицы с прицельным расстоянием $\rho < a$ рассеиваются, т. е. выбывают из падающего пучка. В этом смысле яма ведет себя как «поглощающий» шар; при этом, согласно принципу Бабине (см. II, конец § 61), полное сечение равно удвоенному сечению «поглощения».

2. То же в поле $U = U_0\exp(-r^2/a^2)$.

Решение. В этом случае имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} U\,dz = a\sqrt{\pi}\,U_0\exp(-\rho^2/a^2).$$

Подставив в (131,7) и произведя в интеграле очевидную замену переменной, получим для амплитуды рассеяния на нулевой угол

$$f(0) = -\frac{ika^2}{2}\int_0^{\nu\sqrt{\pi}}\left(e^{-iu}-1\right)\frac{du}{u},$$

где снова $\nu = U_0a/\hbar v$. Отсюда полное сечение

$$\sigma = 2\pi a^2\int_0^{\nu\sqrt{\pi}}(1-\cos u)\frac{du}{u}.$$

При $\nu \ll 1$ подынтегральное выражение сводится к $u/2$ и сечение $\sigma = \pi a^2\nu^2/2$ в согласии с результатом задачи 2 § 126 (при $ka \gg 1$). При $\nu \gg 1$ пишем подынтегральное выражение в виде $(1-e^{-\lambda u}\cos u)/u$ с малым параметром λ, устремляемым затем к нулю. Интегрированием по частям находим тогда

$$\int_0^{\nu\sqrt{\pi}}(1-\cos u)\frac{du}{u} \approx \ln(\nu\sqrt{\pi}) - \int_0^{\infty}\ln u\sin u\,du = \ln(\nu\sqrt{\pi}) + C$$

(C — постоянная Эйлера). Таким образом,

$$\sigma = 2\pi a^2 \ln\left(\nu \sqrt{\pi}\, e^C\right) \quad \text{при } \nu \gg 1.$$

3. Определить сечение рассеяния на малые углы электронов в магнитном поле, сконцентрированном в цилиндрической области радиуса a (*Y. Aharonov, D. Bohm*, 1959).

Решение. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси y, совпадающей с осью цилиндрической области, а направление падения электронов выберем в качестве оси z. Тогда вся картина рассеяния не зависит от координаты y, и ниже рассматривается двумерная задача в плоскости xz.

Вне цилиндрической области напряженность $\mathbf{H} = 0$, но векторный потенциал отличен от нуля и равен

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla\varphi, \tag{1}$$

где φ — полярный угол в плоскости xz, а Φ — поток магнитного поля; действительно, интегрируя по площади круга (радиуса $r > a$) в этой плоскости, имеем

$$\int H\, dx\, dz = \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \frac{\Phi}{2\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \Phi.$$

Потенциал (1) меняет фазу волновой функции (плоской волны) электронов; согласно (111,9) имеем

$$\psi = e^{ikz} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \frac{\Phi}{2\pi} \varphi\right). \tag{2}$$

Это выражение, однако, неприменимо в узкой области вдоль полуоси $z > 0$, поскольку движение частиц, прошедших через область поля, возмущено им. Этим объясняется кажущаяся неоднозначность функции (2) при обходе начала координат (угол φ получает приращение 2π). В действительности вблизи полуоси $z > 0$ имеется разрыв (конечной ширины), связанный с неприменимостью (2); по обе стороны разрыва φ имеет значения, отличающиеся на 2π, например $\mp\pi$.

Для рассеяния на малые углы θ с малой передачей импульса $q \approx k\theta$ ($qa \ll 1$, $\theta \ll 1$) существенны поперечные расстояния $x \sim 1/q \gg a$ и шириной разреза можно пренебречь. Рассматривая область пространства $z \gg |x|$, можно также пренебречь в ней зависимостью ψ от x по обе стороны от оси z; имеем тогда [1])

$$\psi = e^{ikz} F(x), \quad F(x) = \begin{cases} \exp(-ie\Phi/2\hbar c), & x > 0, \\ \exp(ie\Phi/2\hbar c), & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

«Двумерная» амплитуда рассеяния вычисляется по формуле (131,7,а) [2]). При $q \neq 0$ имеем

$$f = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{ie\Phi}{2\hbar c}\right) \int_0^\infty e^{-iqx}\, dx + \text{к. с.} \right\}.$$

Интеграл вычисляется путем введения в него множителя $e^{-\lambda x}$ с последующим переходом к пределу $\lambda \to 0$. В результате находим

$$f = \frac{i}{q} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \sin \frac{e\Phi}{2\hbar c}.$$

1) Формула (3) (как и (131,4) в тексте) теряет применимость при слишком больших z, когда сказываются дифракционные эффекты.

2) Напомним, что эта формула (при $q \neq 0$) может быть получена (как было объяснено в тексте) и без применения уравнения Шредингера в потенциальном поле. (Угол рассеяния обозначаем θ в отличие от полярного угла φ.)

Отсюда сечение рассеяния

$$d\sigma = |f|^2 d\theta = \frac{2}{\pi k}\sin^2\frac{e\Phi}{2\hbar c}\frac{d\theta}{\theta^2}. \qquad (4)$$

При $e\Phi/\hbar c \ll 1$ отсюда получается выражение

$$d\sigma = \frac{e^2\Phi^2}{2\pi k\hbar^2 c^2}\frac{d\theta}{\theta^2},$$

отвечающее случаю применимости теории возмущений.

Обратим внимание на периодическую зависимость сечения (4) от напряженности магнитного поля, а также на расходимость полного сечения (за счет $\theta \to 0$), хотя поле сосредоточено в конечной области пространства; то и другое — специфически квантовые эффекты.

§ 132. Рассеяние медленных частиц

Рассмотрим свойства упругого рассеяния в предельном случае малых скоростей рассеиваемых частиц. Именно, скорость предполагается настолько малой, что длина волны частицы велика по сравнению с радиусом a действия поля $U(r)$ (т. е. $ka \ll \ll 1$), а ее энергия мала по сравнению с величиной поля внутри этого радиуса. Решение этого вопроса требует выяснения предельного закона зависимости фаз δ_l от волнового вектора k при малых значениях последнего.

При $r \lesssim a$ в точном уравнении Шредингера (123,7) можно пренебречь лишь членом с k^2:

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)R_l. \qquad (132,1)$$

В области же $a \ll r \ll 1/k$ можно опустить также и член с $U(r)$, так что остается

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = 0. \qquad (132,2)$$

Общее решение этого уравнения

$$R_l = c_1 r^l + \frac{c_2}{r^{l+1}}. \qquad (132,3)$$

Значения постоянных c_1 и c_2 могут быть в принципе определены лишь путем решения уравнения (132,1) с конкретной функцией $U(r)$; они, разумеется, различны для разных l.

На еще бóльших расстояниях, $r \sim 1/k$, в уравнении Шредингера может быть опущен член с $U(r)$, но нельзя пренебрегать k^2, так что имеем

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0, \qquad (132,4)$$