Отсюда сечение рассеяния

$$d\sigma = |f|^2 d\theta = \frac{2}{\pi k}\sin^2\frac{e\Phi}{2\hbar c}\frac{d\theta}{\theta^2}. \tag{4}$$

При $e\Phi/\hbar c \ll 1$ отсюда получается выражение

$$d\sigma = \frac{e^2\Phi^2}{2\pi k\hbar^2 c^2}\frac{d\theta}{\theta^2},$$

отвечающее случаю применимости теории возмущений.

Обратим внимание на периодическую зависимость сечения (4) от напряженности магнитного поля, а также на расходимость полного сечения (за счет $\theta \to 0$), хотя поле сосредоточено в конечной области пространства; то и другое — специфически квантовые эффекты.

§ 132. Рассеяние медленных частиц

Рассмотрим свойства упругого рассеяния в предельном случае малых скоростей рассеиваемых частиц. Именно, скорость предполагается настолько малой, что длина волны частицы велика по сравнению с радиусом a действия поля $U(r)$ (т. е. $ka \ll \ll 1$), а ее энергия мала по сравнению с величиной поля внутри этого радиуса. Решение этого вопроса требует выяснения предельного закона зависимости фаз δ_l от волнового вектора k при малых значениях последнего.

При $r \lesssim a$ в точном уравнении Шредингера (123,7) можно пренебречь лишь членом с k^2:

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)R_l. \tag{132,1}$$

В области же $a \ll r \ll 1/k$ можно опустить также и член с $U(r)$, так что остается

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = 0. \tag{132,2}$$

Общее решение этого уравнения

$$R_l = c_1 r^l + \frac{c_2}{r^{l+1}}. \tag{132,3}$$

Значения постоянных c_1 и c_2 могут быть в принципе определены лишь путем решения уравнения (132,1) с конкретной функцией $U(r)$; они, разумеется, различны для разных l.

На еще бо́льших расстояниях, $r \sim 1/k$, в уравнении Шредингера может быть опущен член с $U(r)$, но нельзя пренебрегать k^2, так что имеем

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0, \tag{132,4}$$

т. е. уравнение свободного движения. Решение этого уравнения (см. § 33)

$$R_l = c_1 (-1)^l \frac{(2l+1)!!}{k^{2l+1}} r^l \left(\frac{d}{r\,dr}\right)^l \frac{\sin kr}{r} + \\ + c_2 (-1)^l \frac{r^l}{(2l-1)!!} \left(\frac{d}{r\,dr}\right)^l \frac{\cos kr}{r}. \quad (132,5)$$

Постоянные коэффициенты выбраны здесь таким образом, чтобы при $kr \ll 1$ это решение переходило бы в (132,3); тем самым достигается «сшивание» решения (132,3) в области $kr \ll 1$ с решением (132,5) в области $kr \sim 1$.

Наконец, при $kr \gg 1$ решение (132,5) принимает асимптотический вид (§ 33)

$$R_l \approx \frac{c_1 (2l+1)!!}{rk^{l+1}} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) + \frac{c_2 k^l}{r(2l-1)!!} \cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right).$$

Эта сумма может быть представлена в виде

$$R_l \approx \mathrm{const} \cdot \frac{1}{r} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right), \quad (132,6)$$

где фаза δ_l определяется равенством

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx \delta_l = \frac{c_2}{c_1 (2l-1)!!\,(2l+1)!!} k^{2l+1} \quad (132,7)$$

(ввиду малости k все фазы δ_l оказываются малыми).

Согласно (123,15) парциальные амплитуды рассеяния

$$f_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) \approx \frac{\delta_l}{k},$$

и мы приходим к выводу, что в предельном случае малых энергий

$$f_l \propto k^{2l}. \quad (132,8)$$

Таким образом, все парциальные амплитуды с $l \neq 0$ оказываются малыми по сравнению с амплитудой рассеяния с $l = 0$ (или, как говорят, *s-рассеяния*). Пренебрегая ими, имеем для полной амплитуды

$$f(\theta) \approx f_0 = \frac{\delta_0}{k} = \frac{c_2}{c_1} \equiv -\alpha, \quad (132,9)$$

так что $d\sigma = \alpha^2\, do$, а полное сечение

$$\sigma = 4\pi\alpha^2. \quad (132,10)$$

При малых скоростях рассеяние оказывается изотропным по всем направлениям, а его сечение не зависит от энергии частиц [1].

---

[1]) При рассеянии электронов на атомах роль длины a, с которой должно сравниваться $1/k$ (условие $ka \ll 1$), играет атомный радиус, достигающий для сложных атомов нескольких боровских радиусов (нескольких $\hbar^2/me^2$). Ввиду большой величины этого радиуса постоянство сечения фактически имеет в этом случае место лишь до энергий порядка долей электрон-вольта. При больших же энергиях электронов появляется сильная зависимость сечения от энергии (так называемый *эффект Рамзауэра*).

Постоянную величину a называют *длиной рассеяния*; она может быть как положительной, так и отрицательной.

В изложенных рассуждениях молчаливо подразумевалось, что поле $U(r)$ убывает на больших расстояниях ($r \gg a$) достаточно быстро для того, чтобы сделанные пренебрежения были законными. Легко выяснить, какова именно должна быть требуемая быстрота убывания $U(r)$. При больших r второй член в функции R_l (132,3) мал по сравнению с первым. Для того чтобы его сохранение было тем не менее законным, оставленные в уравнении (132,2) малые члены $\sim c_2/r^{l+1}r^2$ должны быть все же велики по сравнению с членом $UR_l \sim Uc_1r^l$, опущенным при переходе от (132,1) к (132,2). Отсюда следует, что $U(r)$ должно убывать быстрее, чем $1/r^{2l+3}$, для того, чтобы был справедливым закон (132,8) для парциальной амплитуды f_l. В частности, вычисление f_0, а потому и результат (132,9) о не зависящем от энергии изотропном рассеянии справедливы лишь при более быстром, чем $1/r^3$, убывании $U(r)$ на больших расстояниях.

Если поле $U(r)$ убывает на больших расстояниях по экспоненциальному закону, то можно сделать определенные заключения о характере дальнейших членов разложения амплитуд f_l по степеням k. Мы видели в § 128, что в этом случае амплитуда f_l, рассматриваемая как функция комплексной переменной E, вещественна при вещественных отрицательных значениях E [1]. То же самое относится поэтому и к функции $g_l(E)$ в выражении (125,15)

$$f_l = \frac{1}{g_l - ik}$$

(при $E < 0$ ik вещественно). С другой стороны, функция $g_l(E)$ вещественна (по ее определению) при $E > 0$. Таким образом, функция $g_l(E)$ оказывается вещественной при всех вещественных E, а потому должна разлагаться по целым степеням E, т. е. по четным степеням k. О самой же амплитуде $f_l(k)$ можно, следовательно, сказать, что она разлагается по целым степеням ik; все члены с четными степенями k вещественны, а члены с нечетными степенями k мнимы. Согласно (132,8) разложение $f_l(k)$ начинается с члена $\sim\delta_l/k \propto k^{2l}$; соответственно этому разложение $g_l(k)$ начинается с члена, пропорционального k^{-2l}.

При убывании поля на больших расстояниях по степенному закону $U \approx \beta r^{-n}$ с $n \leqslant 3$ результат (132,9) о постоянной амплитуде, как уже было указано, несправедлив.

Рассмотрим ситуацию, возникающую при различных значениях n. Для $n \leqslant 1$ при достаточно малых скоростях, практиче-

---

[1]) При малых E условие (128,6) выполняется уже для убывания U по закону $e^{-r/a}$.

ски при всех значениях прицельного параметра ρ выполняется условие

$$\rho \,|\, U(\rho) \,|\, \gg \hbar v \tag{132,11}$$

и потому рассеяние описывается классическими формулами (ср. условие (127,9)).

При $1 < n < 2$ неравенство (132,11) выполняется в значительной области не слишком больших ρ; соответственно этому, оказывается классическим рассеяние на не слишком малые углы. В то же время существует область значений ρ, для которых

$$\rho \,|\, U(\rho) \,|\, \ll \hbar v, \tag{132,12}$$

т. е. выполняется условие применимости теории возмущений (ср. (126,2)).

При $n > 2$ на больших расстояниях имеет место неравенство

$$|\, U \,| \ll \frac{\hbar^2}{mr^2}, \tag{132,13}$$

и поэтому вклад в рассеяние, возникающий от взаимодействия на этих расстояниях, может быть вычислен с помощью теории возмущений (в то время как на более близких расстояниях условие применимости теории возмущений может и не выполняться) [1]. Пусть r_0 есть такое значение r, что при $r \gg r_0$ имеет место неравенство (132,13), и в то же время $r_0 \ll 1/k$. Вклад в амплитуду рассеяния от области расстояний $r \gg r_0$, согласно (126,12), дается интегралом

$$-\frac{2m\beta}{\hbar^2}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\,\frac{\sin qr}{qr}\,r^2\,dr = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\,q^{n-3}\int\limits_{qr_0}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi^{n-1}}\,d\xi. \tag{132,14}$$

При $2 < n < 3$ этот интеграл сходится на нижнем пределе и для малых скоростей ($kr_0 \ll 1$) можно заменить этот предел нулем, так что интеграл оказывается пропорциональным $q^{-(3-n)}$, т. е. отрицательной степени скорости. Этот вклад в амплитуду является, следовательно, в данном случае основным, так что

$$f \sim q^{-(3-n)}, \quad 2 < n < 3. \tag{132,15}$$

Тем самым определяется зависимость сечения рассеяния от скорости частиц и от угла рассеяния.

При $n = 3$ интеграл (132,14) расходится логарифмически на нижнем пределе. При этом он все еще является главной частью амплитуды рассеяния, так что

$$f \sim \ln\frac{\text{const}}{q}, \quad n = 3. \tag{132,16}$$

---

[1]) Рассеяние при малых скоростях нигде не становится в этом случае квазиклассическим, так как неравенство (132,11) оказывается несовместимым с одновременно требуемым условием $|\, U(\rho) \,| \lesssim E$.

При $n > 3$ вклад от области $r \gg r_0$ убывает при $k \to 0$ и рассеяние определяется постоянной амплитудой (132,9). Однако вклад (132,14) в амплитуду рассеяния, несмотря на свою относительную малость, и в этом случае представляет определенный интерес в силу его «аномальности». «Нормальной» ситуацией при достаточно быстром убывании $U(r)$ является разложимость $f(k)$ по целым степеням k, причем все вещественные члены разложения оказываются пропорциональными четным степеням k. Между тем, взяв интеграл (132,14) несколько раз по частям (понижая при этом степень ξ в знаменателе), мы выделим из него часть, содержащую четные степени k, после чего останется сходящийся при $qr_0 \to 0$ интеграл, пропорциональный степени k^{n-3}, которая, вообще говоря, не является четной [1]).

Задачи

1. Определить сечение рассеяния медленных частиц сферической прямоугольной потенциальной ямой глубины U_0 и радиуса a.

Решение. Волновой вектор частицы предполагается удовлетворяющим условиям $ka \ll 1$ и $k \ll \varkappa$, где $\varkappa = \sqrt{2mU_0}/\hbar$. Нас интересует только фаза δ_0. Поэтому полагаем в уравнении (132,1) $l = 0$ и получаем для функции $\chi = rR_0(r)$ уравнение $\chi'' + \varkappa^2\chi = 0$ при $r < a$. Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $r = 0$ (χ/r должно быть конечным при $r = 0$), есть

$$\chi = A \sin \varkappa r, \quad r < a.$$

При $r > a$ функция χ удовлетворяет уравнению $\chi'' + k^2\chi = 0$ (уравнение (132,4) с $l = 0$), откуда

$$\chi = B \sin(kr + \delta_0), \quad r > a.$$

Условие непрерывности χ'/χ при $r = a$ дает

$$\varkappa \operatorname{ctg} a\varkappa = k \operatorname{ctg}(ka + \delta_0) \approx \frac{k}{ka + \delta_0},$$

откуда определяем δ_0. В результате для амплитуды рассеяния получим [2])

$$f = \frac{\operatorname{tg} \varkappa a - \varkappa a}{\varkappa}.$$

При $\varkappa a \ll 1$ (т. е. $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$) эта формула дает $\sigma = \frac{4}{9}\pi a^2 (\varkappa a)^4$ в согласии с результатом борновского приближения (см. задачу 1 § 126).

2. То же для рассеяния на прямоугольном сферическом «потенциальном горбе» высоты U_0.

---

[1]) Если n — нечетное целое число ($n = 2p + 1$), то $n - 3 = 2p - 2$ есть четное число. Тем не менее интеграл (132,14) имеет и в этом случае «аномальную» часть, давая вклад в амплитуду рассеяния, пропорциональный $q^{2p-2} \ln q$.

[2]) Эта формула становится неприменимой, если ширина и глубина ямы таковы, что $\varkappa a$ близко к нечетному кратному от $\pi/2$. При таких значениях $\varkappa a$ среди дискретного спектра отрицательных уровней энергии имеется уровень, близкий к нулю (см. задачу 1 § 33), и рассеяние описывается формулами, которые будут получены в следующем параграфе.

Решение получается из решения предыдущей задачи заменой U_0 на $-U$ (в связи с чем надо заменить $\varkappa$ на $i\varkappa$). Амплитуда рассеяния

$$f = \frac{\operatorname{th} \varkappa a - \varkappa a}{\varkappa}.$$

В предельном случае $\varkappa a \gg 1$ имеем

$$f = -a, \quad \sigma = 4\pi a^2.$$

Этот результат соответствует рассеянию от непроницаемой сферы радиуса a; отметим, что классическая механика дала бы величину, в четыре раза меньшую ($\sigma = \pi a^2$).

3. Определить сечение рассеяния частиц с малой энергией в поле $U = \alpha/r^n$, $\alpha > 0$, $n > 3$.

Решение. Уравнение (132,1) с $l = 0$ есть

$$\chi'' - \gamma^2 \frac{\chi}{r^n} = 0, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar}.$$

Подстановками

$$\chi = \varphi \sqrt{r}, \quad r = \left(\frac{2\gamma}{(n-2)\,x}\right)^{\frac{2}{n-2}}$$

оно приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} - \left[1 + \frac{1}{(n-2)^2 x^2}\right]\varphi = 0,$$

т. е. к уравнению для функции Бесселя порядка $1/(n-2)$ от мнимого аргумента ix. Решение, обращающееся в нуль при $r = 0$ (т. е. при $x = \infty$), есть, с точностью до постоянного множителя,

$$\chi = \sqrt{r}\, H^{(1)}_{1/(n-2)}\left(\frac{2i\gamma}{n-2} r^{-\frac{n-2}{2}}\right).$$

С помощью известных формул

$$H^{(1)}_p(z) = \frac{i}{\sin p\pi}\left[e^{-ip\pi} J_p(z) - J_{-p}(z)\right], \quad J_p(z) \approx \frac{z^p}{2^p \Gamma(1+p)}, \quad z \ll 1$$

получаем для функции χ на больших расстояниях ($\gamma \ll r \ll 1/k$) выражение вида $\chi = \text{const}\cdot(c_1 r + c_2)$ и по отношению c_2/c_1 находим амплитуду рассеяния

$$f = -\left(\frac{\gamma}{n-2}\right)^{\frac{2}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{n-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{n-2}\right)}.$$

4. Определить амплитуду рассеяния медленных частиц в поле, убывающем на больших расстояниях по закону $U = \beta r^{-n}$ ($2 < n \leqslant 3$).

Решение. Главный член в амплитуде рассеяния дается выражением (132,14), в котором нижний предел интеграла можно заменить нулем. Вычисление интеграла приводит к результату:

$$f = \frac{\pi m \beta}{\hbar^2} \frac{q^{n-3}}{\Gamma(n-1)\cos\frac{\pi n}{2}}, \quad 2 < n < 3, \tag{1}$$

и при $n = 3$

$$f = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \ln \frac{\mathrm{const}}{q}. \tag{2}$$

Разложив (1) по полиномам Лежандра, можно получить парциальные амплитуды рассеяния (определенные согласно (123,14))

$$f_l = -\frac{\sqrt{\pi}\, m\beta}{2\hbar^2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(l - \frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + l\right)} k^{n-3}. \tag{3}$$

При $n > 3$ та же формула (1) определяет «аномальную» часть амплитуды рассеяния. В парциальных же амплитудах величина (3) всегда является основной для таких значений l, для которых $2l > n - 3$; вместо (132,8) имеем при этом $f_l \propto k^{n-3}$.

5. Определить амплитуду рассеяния медленных частиц в поле $U(r) = -U_0 \exp(-r/a)$, $U_0 > 0$.

Решение. После замены переменной

$$x = 2a\varkappa e^{-r/2a}, \quad \varkappa = \sqrt{2mU_0}/\hbar$$

уравнение (132,1) для функции $\chi = rR_0$ принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\chi}{dx} + \chi = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$\chi = AJ_0(x) + BN_0(x),$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя соответственно первого и второго рода. Условие $\chi = 0$ при $r = 0$ дает

$$A/B = -N_0(2\varkappa a)/J_0(2\varkappa a).$$

Области же $a \ll r \ll 1/k$ отвечают $x \ll 1$ (при этом, конечно, подразумевается, что $a\varkappa \exp(-1/ak) \ll 1$); здесь

$$\chi \approx A + B\frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2} = A + \frac{2B}{\pi}\ln \varkappa a\gamma - \frac{B}{\pi a} r,$$

где $\gamma = e^C = 1{,}78 \ldots$ (C — постоянная Эйлера). Это выражение отвечает формуле (132,3) и по полученным таким образом значениям c_1 и c_2 находим амплитуду рассеяния

$$f = -a\left(\frac{\pi A}{B} + 2\ln \varkappa a\gamma\right) = \frac{a\pi}{J_0(2\varkappa a)}\left[N_0(2\varkappa a) - \frac{2}{\pi}\ln(\varkappa a\gamma)\, J_0(2\varkappa a)\right].$$

В предельном случае $\varkappa a \ll 1$: $f = 2a^3\varkappa^2$ (в согласии с формулой борновского приближения (126,14)). При $\varkappa a \gg 1$ имеем $f = -2a\ln(\varkappa a\gamma)$.

6. Во втором приближении теории возмущений определить амплитуду рассеяния в предельном случае малых энергий (*И. Я. Померанчук*, 1948).

Решение. При $k \to 0$ интеграл во втором члене формулы (130,13) принимает вид

$$-\int \frac{U_{-\mathbf{k}''}U_{\mathbf{k}''}}{k''^2} d^3k'' = -\iiint U(\mathbf{r})\, U(\mathbf{r}')\, e^{i\mathbf{k}''(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3k''}{k''^2} dV\, dV' =$$

$$= -2\pi^2 \iint \frac{U(\mathbf{r})\, U(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV\, dV';$$

мы воспользовались здесь формулой

$$\int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{4\pi}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

(см. II, § 51). Таким образом, амплитуда рассеяния

$$f=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U\,dV+\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\iint\frac{U(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV\,dV'. \qquad (1)$$

В случае центрального поля эта формула дает

$$f=-\frac{2m}{\hbar^2}\int Ur^2\,dr+\frac{8m^2}{\hbar^4}\iint\limits_{r'>r}U(r)\,U(r')\,r^2\,dr\cdot r'\,dr'.$$

Второй член в формуле (1) всегда положителен (как это ясно из исходного выражения интеграла в $\mathbf{k}$-пространстве). Отсюда следует, что в поле отталкивания ($U>0$) первое борновское приближение дает всегда завышенный, а в поле притяжения ($U<0$) — заниженный результат для сечения рассеяния при малых энергиях.

7. Определить зависимость от энергии амплитуды рассеяния медленных частиц в двумерном случае.

Решение. Волновая функция на больших расстояниях дается в двумерном случае формулой (1) задачи к § 124. Рассуждения, аналогичные проведенным в трехмерном случае, показывают, что главный вклад в рассеяние при малых энергиях вносит состояние с $m=0$, так что амплитуда рассеяния f не зависит от угла рассеяния φ. Это позволяет записать волновую функцию на всех расстояниях $\rho\gg a$ просто заменив $e^{ik\rho}/\sqrt{\rho}$ на точное решение уравнения Шредингера свободного движения, имеющее такую асимптотику. (См примечание на стр. 198 и задачу 6 к § 126.) Таким образом

$$\psi=e^{ikz}+f\sqrt{\frac{\pi k}{2}}\cdot iH_0^{(1)}(k\rho). \qquad (1)$$

Перейдем в (1) к области малых расстояний $\rho\ll 1/k$, используя приближенное выражение для $H_0^{(1)}(x)$ при малых x:

$$H_0^{(1)}(x)\approx -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2i}{\gamma x},\qquad |x|\ll 1,$$

$\gamma=e^C$, C — постоянная Эйлера. Получаем:

$$\psi\approx\left(1+f\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\ln\frac{2i}{\gamma k}\right)-f\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\ln\rho. \qquad (2)$$

Формула (2), как и должно быть, соответствует общему решению уравнения $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d\psi}{d\rho}=0$, справедливого в области $\frac{1}{k}\gg\rho\gg a$, где в уравнении Шредингера можно пренебречь членами с $U(x)$ и E:

$$\psi\approx c_1+c_2\ln\rho.$$

Как и в (132,3), (132,9) отношение постоянных c_1/c_2 определяется решением уравнения Шредингера с $E=0$ в области $\rho\sim a$. Это отношение вещественно и не зависит от энергии. Обозначим

$$c_1/c_2=-\ln r_0, \qquad (3)$$

где r_0 — постоянная размерности длины. Сравнивая (2) с (3), находим

$$f = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\frac{1}{\ln\left(i\frac{2}{\gamma k r_0}\right)},$$

откуда сечение

$$\sigma = 2\pi|f|^2 = \frac{\pi^2}{k}\frac{1}{\ln^2\frac{2}{\gamma k r_0}+\frac{\pi^2}{4}}. \tag{4}$$

Мы видим, что в двумерном случае, в отличие от трехмерного, сечение рассеяния возрастает с уменьшением энергии.

Заметим, что при рассеянии на бесконечно-высоком цилиндрическом потенциальном барьере радиуса a постоянная r_0 в (3) совпадает с a.

§ 133. Резонансное рассеяние при малых энергиях

Особого рассмотрения требует рассеяние медленных ($ka \ll 1$) частиц в поле притяжения в случае, когда в дискретном спектре отрицательных уровней энергии имеется s-состояние с энергией, малой по сравнению с величиной поля U в пределах радиуса a его действия; обозначим этот уровень посредством ε ($\varepsilon < 0$). Энергия E рассеиваемой частицы, будучи малой величиной, близка к уровню ε, т. е. находится, как говорят, почти в *резонансе* с ним. Это приводит, как мы увидим, к значительному увеличению сечения рассеяния.

Наличие неглубокого уровня можно учесть в теории рассеяния формальным методом, основанным на следующих замечаниях.

В точном уравнении Шредингера для функции $\chi = rR_0(r)$ (при $l = 0$)

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\chi = 0,$$

во «внутренней» области поля ($r \lesssim a$) можно пренебречь E по сравнению с U:

$$\chi'' - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi = 0, \quad r \sim a. \tag{133,1}$$

Во «внешней» же области ($r \gg a$), напротив, можно пренебречь U:

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\chi = 0, \quad r \gg a. \tag{133,2}$$

Решение уравнения (133,2) должно было бы быть «сшито» при некотором r_1 (таком, что $1/k \gg r_1 \gg a$) с решением уравнения (133,1), удовлетворяющим граничному условию $\chi(0) = 0$; условие сшивания заключается в непрерывности отношения χ'/χ, не зависящего от общего нормировочного множителя волновой функции.

Однако вместо того, чтобы рассматривать движение в области $r \sim a$, мы наложим на решение во внешней области должным