где r_0 — постоянная размерности длины. Сравнивая (2) с (3), находим

$$f = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\frac{1}{\ln\left(i\frac{2}{\gamma k r_0}\right)},$$

откуда сечение

$$\sigma = 2\pi|f|^2 = \frac{\pi^2}{k}\frac{1}{\ln^2\frac{2}{\gamma k r_0}+\frac{\pi^2}{4}}. \tag{4}$$

Мы видим, что в двумерном случае, в отличие от трехмерного, сечение рассеяния возрастает с уменьшением энергии.

Заметим, что при рассеянии на бесконечно-высоком цилиндрическом потенциальном барьере радиуса a постоянная r_0 в (3) совпадает с a.

§ 133. Резонансное рассеяние при малых энергиях

Особого рассмотрения требует рассеяние медленных ($ka \ll 1$) частиц в поле притяжения в случае, когда в дискретном спектре отрицательных уровней энергии имеется s-состояние с энергией, малой по сравнению с величиной поля U в пределах радиуса a его действия; обозначим этот уровень посредством ε ($\varepsilon < 0$). Энергия E рассеиваемой частицы, будучи малой величиной, близка к уровню ε, т. е. находится, как говорят, почти в *резонансе* с ним. Это приводит, как мы увидим, к значительному увеличению сечения рассеяния.

Наличие неглубокого уровня можно учесть в теории рассеяния формальным методом, основанным на следующих замечаниях.

В точном уравнении Шредингера для функции $\chi = rR_0(r)$ (при $l = 0$)

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\chi = 0,$$

во «внутренней» области поля ($r \lesssim a$) можно пренебречь E по сравнению с U:

$$\chi'' - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi = 0, \quad r \sim a. \tag{133,1}$$

Во «внешней» же области ($r \gg a$), напротив, можно пренебречь U:

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\chi = 0, \ r \gg a. \tag{133,2}$$

Решение уравнения (133,2) должно было бы быть «сшито» при некотором r_1 (таком, что $1/k \gg r_1 \gg a$) с решением уравнения (133,1), удовлетворяющим граничному условию $\chi(0) = 0$; условие сшивания заключается в непрерывности отношения χ'/χ, не зависящего от общего нормировочного множителя волновой функции.

Однако вместо того, чтобы рассматривать движение в области $r \sim a$, мы наложим на решение во внешней области должным образом подобранное граничное условие для χ'/χ при малых r; поскольку внешнее решение медленно меняется при $r \to 0$, можно формально отнести это условие к точке $r = 0$. Уравнение (133,1) в области $r \sim a$ не содержит E; поэтому заменяющее его граничное условие тоже не должно зависеть от энергии частицы. Другими словами, оно должно иметь вид

$$\left.\frac{\chi'}{\chi}\right|_{r\to 0} = -\varkappa, \tag{133,3}$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная. Но раз $\varkappa$ не зависит от E, то это же условие (133,3) должно относиться и к решению уравнения Шредингера для малой отрицательной энергии $E = -|\varepsilon|$, т. е. к волновой функции соответствующего стационарного состояния частицы. При $E = -|\varepsilon|$ имеем из (133,2)

$$\chi = A_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m|\varepsilon|}}{\hbar} r\right) \tag{133,4}$$

(A_0 — постоянная), и подстановка этой функции в (133,3) показывает, что $\varkappa$ есть положительная величина, равная

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2m|\varepsilon|}}{\hbar}. \tag{133,5}$$

Применим теперь граничное условие (133,3) к волновой функции свободного движения

$$\chi = \mathrm{const}\cdot\sin(kr + \delta_0),$$

представляющей собой точное общее решение уравнения (133,2) при $E > 0$. В результате получим для искомой фазы δ_0

$$\operatorname{ctg}\delta_0 = -\frac{\varkappa}{k} = -\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{E}}. \tag{133,6}$$

Поскольку энергия E ограничена здесь лишь условием $ak \ll 1$, но не должна быть малой по сравнению с $|\varepsilon|$, то фаза δ_0, а с нею и амплитуда s-рассеяния могут оказаться не малыми величинами.

Фазы же δ_l с $l > 0$, а с ними и соответствующие парциальные амплитуды остаются по-прежнему малыми. Поэтому полную амплитуду можно по-прежнему считать совпадающей с амплитудой s-рассеяния

$$f \approx \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_0} - 1\right) = \frac{1}{k(\operatorname{ctg}\delta_0 - i)}.$$

Подставив сюда (133,6), получим

$$f = -\frac{1}{\varkappa + ik} \tag{133,7}$$

и для полного сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{\varkappa^2 + k^2} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\,\frac{1}{E + |\varepsilon|}. \tag{133,8}$$

Таким образом, рассеяние по-прежнему изотропно, но его сечение зависит от энергии, и в области резонанса ($E \sim |\varepsilon|$) оказывается большим по сравнению с квадратом радиуса действия поля a^2 (поскольку $1/k \gg a$). Подчеркнем, что вид формулы (133,8) не зависит от деталей взаимодействия частиц на малых расстояниях между ними и всецело определяется значением резонансного уровня [1]).

Полученная формула имеет несколько более общий характер, чем сделанное при ее выводе предположение. Подвергнем функцию $U(r)$ небольшому изменению; при этом изменится и значение постоянной $\varkappa$ в граничном условии (133,3). Соответствующим изменением $U(r)$ можно добиться обращения $\varkappa$ в нуль, а затем сделать малой отрицательной величиной. При этом мы получим ту же формулу (133,7) для амплитуды рассеяния и ту же формулу (133,8) для сечения. В последней, однако, величина $|\varepsilon| = \hbar^2\varkappa^2/2m$ является теперь просто характерной для поля $U(r)$ постоянной, но отнюдь не уровнем энергии в этом поле. В таких случаях говорят, что в поле имеется *виртуальный уровень*, имея в виду, что хотя в действительности никакого близкого к нулю уровня нет, но уже небольшого изменения поля было бы достаточно для того, чтобы такой уровень появился.

При аналитическом продолжении функции (133,7) в плоскости комплексного E на левой вещественной полуоси ik переходит в $-\sqrt{-2mE}/\hbar$ (см. § 128), и мы видим, что амплитуда рассеяния имеет полюс при $E = -|\varepsilon|$ в соответствии с общими результатами § 128. Напротив, виртуальному уровню, как и следовало, не соответствует на физическом листе никакой особенности в амплитуде рассеяния (полюс же $E = -|\varepsilon|$ амплитуда рассеяния имеет на нефизическом листе — см. примечание на стр. 611).

С формальной точки зрения формула (133,7) соответствует случаю, когда в выражении (125,15)

$$f_0 = \frac{1}{g_0(k) - ik}$$

первый член разложения функции $g_0(k)$ отрицателен и аномально мал. Для уточнения формулы можно учесть еще и следующий член разложения, написав

$$f_0 = \frac{1}{-\varkappa_0 + \frac{1}{2} r_0 k^2 - ik} \qquad (133,9)$$

(*Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский*, 1944); напомним, что при достаточно быстром убывании поля функции $g_l(k)$ разлагаются

[1]) Формула (133,8) была впервые получена *Вигнером* (*E. Wigner*, 1933); идея изложенного вывода принадлежит *Бете* и *Пайерлсу* (*H. A. Bethe*, *R. Peierls*, 1935).

по четным степеням k — см. § 132. Мы обозначили здесь посредством $-\varkappa_0$ величину $g_0(0)$, имея в виду сохранить обозначение $\varkappa$ для величины (133,5), связанной с уровнем энергии ε. Согласно сказанному выше $\varkappa$ определяется как значение $-ik = \varkappa$, обращающее в нуль знаменатель в (133,9), т. е. корень уравнения

$$\varkappa = \varkappa_0 + \frac{1}{2} r_0 \varkappa^2. \tag{133,10}$$

Поправочный член $r_0k^2/2$ в знаменателе в (133,9) мал по сравнению с $\varkappa_0$ в силу предполагаемой малости k, но сам по себе он имеет «нормальный» порядок величины: коэффициент $r_0 \sim a$ (этот коэффициент всегда положителен — см. задачу 1). Следует подчеркнуть, что учет этого члена является еще законным уточнением формулы для амплитуды рассеяния, в которой пренебрежено вкладами от моментов $l \neq 0$: он дает в f поправку относительного порядка ak, между тем как вклад от рассеяния с $l = 1$ имеет относительный порядок $(ak)^3$.

При $k \to 0$ амплитуда $f_0 \to -1/\varkappa_0$, т. е. $1/\varkappa_0$ совпадает с введенной в предыдущем параграфе длиной рассеяния α. Коэффициент r_0 в формуле

$$g_0(k) \equiv k \operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \tag{133,11}$$

называют *эффективным радиусом взаимодействия* [1]).

Для сечения рассеяния имеем из (133,9)

$$\sigma = \frac{4\pi}{\left(\varkappa_0 - \frac{1}{2} r_0 k^2\right)^2 + k^2}.$$

Если пренебречь в знаменателе членом $\sim k^4$ (хотя он и является законным), то эту формулу можно представить (с учетом (133,10)) в виде

$$\sigma = \frac{4\pi(1 + r_0\varkappa)}{k^2 + \varkappa^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1 + r_0\varkappa}{E + |\varepsilon|}. \tag{133,12}$$

Вернемся к выражению (133,4) волновой функции связанного состояния во «внешней» области и свяжем нормировочный коэффициент в ней с введенными выше параметрами. Определив вычет

---

[1]) Укажем значения постоянных α и r_0 для важного случая взаимодействия двух нуклонов. Для нейтрона и протона с параллельными спинами (изотопическое состояние с $T = 0$) $\alpha = 5{,}4 \cdot 10^{-13}$, $r_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-13}$ см; этим значениям соответствует истинный уровень с энергией $|\varepsilon| = 2{,}23$ МэВ — основное состояние дейтрона. Для нейтрона же и протона с антипараллельными спинами (изотопическое состояние с $T = 1$) $\alpha = -24 \cdot 10^{-13}$, $r_0 = 2{,}7 \cdot 10^{-13}$ см; этим значениям отвечает виртуальный уровень $|\varepsilon| = 0{,}067$ МэВ. В силу изотопической инвариантности последние значения должны относиться также и к системе двух нейтронов с антипараллельными спинами (параллельные спины система nn в s-состоянии вообще не может иметь в силу принципа Паули).

функции (133,9) в ее полюсе $E = \varepsilon$ и сравнив с формулой (128,11), найдем

$$\frac{1}{A_0^2} = \frac{1}{2\varkappa} - \frac{r_0}{2}. \qquad (133,13)$$

Второй член представляет собой малую поправку к первому, поскольку $\varkappa r_0 \sim \varkappa a \ll 1$. Без этой поправки $A_0^2 = 2\varkappa$, т. е.

$$\chi = \sqrt{2\varkappa}\, e^{-\varkappa r}, \quad \psi = \frac{\chi}{\sqrt{4\pi}r} = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \qquad (133,14)$$

что соответствует такой нормировке, как если бы выражение (133,14) было справедливым во всем пространстве.

Остановимся кратко на резонансе в рассеянии с не равными нулю орбитальными моментами.

Разложение функции $g_l(k)$ начинается с члена $\sim k^{-2l}$; сохранив два первых члена разложения, напишем парциальную амплитуду рассеяния в виде

$$f_l = -\frac{1}{bE^{-l}(-\varepsilon + E) + ik}, \qquad (133,15)$$

где b и ε — две постоянные, причем $b > 0$ (см. ниже). Резонансному случаю соответствует аномально малое значение коэффициента при E^{-l}, т. е. аномально малое ε. Однако, ввиду малости E, член $b\varepsilon E^{-l}$ все же может быть и велик по сравнению с k.

Если $\varepsilon < 0$, то знаменатель выражения (133,15) имеет вещественный корень $E \approx -|\varepsilon|$, так что ε есть дискретный уровень энергии (с моментом l) [1]. Однако в противоположность резонансу в s-рассеянии амплитуда (133,15) при этом нигде не становится большой по сравнению с a; амплитуда резонансного рассеяния с моментом $l+1$ оказывается лишь того же порядка величины, что и амплитуда нерезонансного рассеяния с моментом l.

Если же $\varepsilon > 0$, то амплитуда (133,15) достигает в области $E \sim \varepsilon$ порядка величины $1/k$, т. е. становится большой по сравнению с a. Относительная ширина этой области мала: $\Delta E/\varepsilon \sim (ak)^{2l-1}$. Таким образом, в этом случае имеет место резко выраженный резонанс. Такая картина резонансного рассеяния связана с тем, что положительный уровень с $l \neq 0$ хотя и не является истинным дискретным уровнем, но представляет собой квазидискретный уровень: благодаря наличию центробежного потенциального барьера вероятность ухода частицы с малой энергией из этого состояния на бесконечность мала, так что «продолжительность жизни» состояния велика (см. § 134). В этом заклю-

[1]) При $\varepsilon < 0$ и E, близком к $|\varepsilon|$, имеем

$$f_l \approx (-1)^{l+1}\,|\varepsilon|^l/b\,(E + |\varepsilon|).$$

Сравнение с (128,17) показывает, что $b > 0$.

чается причина отличия характера резонансного рассеяния при $l \neq 0$ от резонанса в s-состоянии, где центробежный барьер отсутствует.

Знаменатель в (133,15) при $\varepsilon > 0$ обращается в нуль при $E = E_0 - i\Gamma/2$, где

$$E_0 \approx \varepsilon, \ \Gamma = \frac{2\sqrt{2m}}{b\hbar} \varepsilon^{l+1/2}. \tag{133,16}$$

Этот полюс амплитуды рассеяния находится, однако, на «нефизическом» листе. Малая величина Γ является шириной квазидискретного уровня (§ 134).

Наконец, укажем интересное свойство фаз δ_l, которое легко установить на основании изложенных выше результатов.

Будем рассматривать фазы $\delta_l(E)$ как непрерывные функции энергии, не приводя их к интервалу между 0 и π (ср. примечание на стр. 141). Покажем, что тогда имеет место равенство

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l \pi, \tag{133,17}$$

где n_l — число дискретных уровней с моментом l в поле притяжения $U(r)$ (*N. Levinson*, 1949).

Для этого заметим, что в поле, удовлетворяющем условию $|U| \ll \hbar^2/ma^2$, при всех энергиях применимо борновское приближение, так что $\delta_l(E) \ll 1$ при всех E. При этом $\delta_l(\infty) = 0$, поскольку при $E \to \infty$ амплитуда рассеяния стремится к нулю; значение же $\delta_l(0) = 0$ в соответствии с общими результатами § 132. В то же время в таком поле отсутствуют дискретные уровни (см. § 45), так что $n_l = 0$. Будем теперь следить за изменением разности $\delta_l(\Delta) - \delta_l(\infty)$ (где Δ — некоторая заданная малая величина) при постепенном углублении потенциальной ямы $U(r)$. По мере углубления у верхнего края ямы последовательно появляются первый, второй и т. д. уровни. При этом фаза $\delta_l(\Delta)$ получает каждый раз приращение на π [1]). Достигнув заданного $U(r)$ и устремив затем $\Delta \to 0$, мы и получим формулу (133,17).

Задачи

1. Выразить эффективный радиус взаимодействия r_0 через волновую функцию связанного состояния ($E = \varepsilon$) во «внутренней» области, $r \sim a$ (*Я. А. Смородинский*, 1948).

---

[1]) В формуле (133,6) этому соответствует изменение δ_0 от 0 до π, когда, при заданном малом значении k, величина $\varkappa$ меняется от отрицательного значения $-\varkappa \gg k$ до положительного значения $\varkappa \gg k$. В случае $l \neq 0$ то же самое следует из формулы $k \operatorname{ctg} \delta_l = -bE^{-l}(E - \varepsilon)$, когда, при заданном $E = \Delta$, ε меняется от $\varepsilon \gg \Delta$ до $-\varepsilon \gg \Delta$.

Решение. Пусть χ_0 — волновая функция в области $r \sim a$, нормированная условием $\chi_0 \to 1$ при $r \to \infty$. Тогда квадрат волновой функции во всем пространстве можно написать в виде

$$\chi^2 = A_0^2 \left(e^{-2\varkappa r} + \chi_0^2 - 1\right)$$

(это выражение переходит в $A_0^2 e^{-2\varkappa r}$ при $\varkappa r \gg 1$ и в $A_0^2 \chi_0^2$ при $\varkappa r \ll 1$).

Он должен быть нормирован условием

$$\int_0^\infty \chi^2 \, dr = A_0^2 \left[\frac{1}{2\varkappa} - \int_0^\infty (1 - \chi_0^2)\, dr\right] = 1,$$

и сравнение с (133,13) дает

$$r_0 = 2 \int_0^\infty (1 - \chi_0^2)\, dr.$$

Из уравнения (133,1) с $U(r) < 0$, решением которого является функция χ_0, следует, что $\chi_0(r) < \chi_0(\infty) = 1$. Поэтому всегда $r_0 > 0$.

2. Определить изменение фаз δ_l при варьировании поля $U(r)$.

Решение. Варьируя $U(r)$ в уравнении Шредингера

$$\chi_l'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - U\right]\chi_l = 0,$$

получим

$$\delta\chi_l'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - U\right]\delta\chi_l = \frac{2m}{\hbar^2}\chi_l \delta U.$$

Умножив первое уравнение на $\delta\chi_l$, второе — на χ_l, вычтя почленно одно из другого и интегрируя по dr, найдем

$$(\chi_l \delta\chi_l' - \chi_l' \delta\chi_l)\,\Big|_{r\to\infty} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty \chi_l^2 \delta U\, dr.$$

Подставив в левую сторону равенства асимптотические выражения

$$\chi_l = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right),$$

$$\delta\chi_l = \delta(\delta_l)\cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

(выбором коэффициента 1 в этом выражении определяется принимаемая нами здесь нормировка χ_l), получим

$$\delta(\delta_l) = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty \chi_l^2 \,\delta U\, dr.$$

На основании этой формулы можно сделать определенные заключения о знаке фаз δ_l, рассматриваемых как непрерывные функции энергии. Для устранения неоднозначности в определении этих функций (аддитивная постоянная, кратная π) будем нормировать их условием $\delta_l(\infty) = 0$.

Начав с $U = 0$, когда все $\delta_l = 0$, и постепенно увеличивая $|U|$, найдем, что в поле оттталкивания ($U > 0$) все $\delta_l < 0$, а в поле притяжения ($U < 0$) $\delta_l > 0$. В поле отталкивания $\delta_l(0) = 0$, и потому при малых энергиях δ_l малы; амплитуда рассеяния, следовательно, отрицательна: $f \approx \delta_0/k < 0$. В поле притяжения аналогичное заключение о положительности f можно сделать лишь в случае отсутствия уровней; в противном случае при малых E фазы δ_l близки не к нулю, а к $n\pi$ (см. (133,17)) и никаких заключений о знаке f сделать нельзя.

3. Найти длину рассеяния α и эффективный радиус взаимодействия r_0 для сферической прямоугольной потенциальной ямы радиуса a и глубины U_0, в которой имеется единственный дискретный уровень энергии, близкий к нулю.

Решение. Поступаем, как в задаче 1 к § 132, с той разницей, однако, что в области внутри ямы не пренебрегаем энергией частицы $E = \hbar^2k^2/2m$ по сравнению с U_0. Для определения фазы δ_0 получаем уравнение

$$k \operatorname{ctg}(\delta_0 + ak) = K \operatorname{ctg} aK, \quad K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 + E)}.$$

Для того чтобы в яме имелся лишь один, близкий к нулю уровень, должно быть

$$U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}(1 + \Delta)$$

с $\Delta \ll 1$ (см. задачу 1 к § 33). Разлагая написанное уравнение по степеням ka и Δ, получим

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 \approx -\frac{\pi^2}{8a}\Delta + \frac{ak^2}{2},$$

откуда $\alpha = 1/\varkappa_0 = 8a/\pi^2\Delta$, $r_0 = a$. Значение $\varkappa_0$ совпадает, как и следовало, с величиной $\sqrt{2m|E_1|}/\hbar$, где E_1 — энергия уровня в яме (см. задачу 1 к § 33).

4. Выразить интеграл $\int\limits_0^a \chi^2\,dr$ от квадрата волновой функции s-состояния через фазу $\delta_0(k)$ для поля $U(r)$, отличного от нуля лишь внутри сферы радиуса a (*G. Lüders*, 1955).

Решение. Согласно (128,10) имеем

$$\int\limits_0^a \chi^2\,dr = \frac{1}{2k}\left[\chi'\frac{\partial\chi}{\partial k} - \chi\left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right)'\right]_{r=a},$$

где штрих означает дифференцирование по r (а производные по E в (128,10) заменены производными по $k = \sqrt{2mE}/\hbar$). Поскольку при $r = a$ поле уже отсутствует, то в правой стороне равенства можно использовать волновую функцию свободного движения $\chi = 2\sin(kr + \delta_0)$ (нормировка согласно (33,20)). В результате получим

$$\int\limits_0^a \chi^2\,dr = 2\left(a + \frac{d\delta_0}{dk}\right) - \frac{1}{k}\sin 2(ka + \delta_0) > 0.$$

Поскольку интеграл от χ^2 заведомо положителен, то должно быть положительно и выражение в правой стороне равенства [1]).

§ 134. Резонанс на квазидискретном уровне

Система, способная к распаду, не обладает, строго говоря, дискретным спектром энергий. Вылетающая из нее при распаде частица уходит на бесконечность; в этом смысле движение системы инфинитно, а потому энергетический спектр непрерывен.

Может, однако, оказаться, что вероятность распада системы очень мала. Простейший пример такого рода представляет ча-

[1]) Это неравенство ранее было получено другим способом *Вигнером* (1955).