в случае отсутствия уровней; в противном случае при малых E фазы δ_l близки не к нулю, а к $n\pi$ (см. (133,17)) и никаких заключений о знаке f сделать нельзя.

3. Найти длину рассеяния α и эффективный радиус взаимодействия r_0 для сферической прямоугольной потенциальной ямы радиуса a и глубины U_0, в которой имеется единственный дискретный уровень энергии, близкий к нулю.

Решение. Поступаем, как в задаче 1 к § 132, с той разницей, однако, что в области внутри ямы не пренебрегаем энергией частицы $E = \hbar^2k^2/2m$ по сравнению с U_0. Для определения фазы δ_0 получаем уравнение

$$k \operatorname{ctg}(\delta_0 + ak) = K \operatorname{ctg} aK, \quad K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0+E)}\,.$$

Для того чтобы в яме имелся лишь один, близкий к нулю уровень, должно быть

$$U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}(1+\Delta)$$

с $\Delta \ll 1$ (см. задачу 1 к § 33). Разлагая написанное уравнение по степеням ka и Δ, получим

$$k \operatorname{ctg}\delta_0 \approx -\frac{\pi^2}{8a}\Delta + \frac{ak^2}{2},$$

откуда $\alpha = 1/\varkappa_0 = 8a/\pi^2\Delta$, $r_0 = a$. Значение $\varkappa_0$ совпадает, как и следовало, с величиной $\sqrt{2m|E_1|}/\hbar$, где E_1 — энергия уровня в яме (см. задачу 1 к § 33).

4. Выразить интеграл $\int\limits_0^a \chi^2\,dr$ от квадрата волновой функции s-состояния через фазу $\delta_0(k)$ для поля $U(r)$, отличного от нуля лишь внутри сферы радиуса a (*G. Lüders*, 1955).

Решение. Согласно (128,10) имеем

$$\int\limits_0^a \chi^2\,dr = \frac{1}{2k}\left[\chi'\frac{\partial\chi}{\partial k} - \chi\left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right)'\right]_{r=a},$$

где штрих означает дифференцирование по r (а производные по E в (128,10) заменены производными по $k = \sqrt{2mE}/\hbar$). Поскольку при $r = a$ поле уже отсутствует, то в правой стороне равенства можно использовать волновую функцию свободного движения $\chi = 2\sin(kr + \delta_0)$ (нормировка согласно (33,20)). В результате получим

$$\int\limits_0^a \chi^2\,dr = 2\left(a + \frac{d\delta_0}{dk}\right) - \frac{1}{k}\sin 2(ka + \delta_0) > 0.$$

Поскольку интеграл от χ^2 заведомо положителен, то должно быть положительно и выражение в правой стороне равенства [1]).

§ 134. Резонанс на квазидискретном уровне

Система, способная к распаду, не обладает, строго говоря, дискретным спектром энергий. Вылетающая из нее при распаде частица уходит на бесконечность; в этом смысле движение системы инфинитно, а потому энергетический спектр непрерывен.

Может, однако, оказаться, что вероятность распада системы очень мала. Простейший пример такого рода представляет ча-

[1]) Это неравенство ранее было получено другим способом *Вигнером* (1955).

стица, окруженная достаточно высоким и широким потенциальным барьером. Другим источником метастабильности состояния может явиться необходимость изменения спина системы при распаде, осуществляющегося за счет слабого спин-орбитального взаимодействия.

Для таких систем с малой вероятностью распада можно ввести понятие о *квазистационарных* состояниях, в которых частицы движутся в течение длительного времени «внутри системы», покидая ее лишь по истечении значительного промежутка времени τ, которое можно назвать *продолжительностью жизни* данного почти стационарного состояния ($\tau \sim 1/w$, где w — вероятность распада в единицу времени). Энергетический спектр этих состояний будет *квазидискретным*; он состоит из ряда размытых уровней, *ширина* которых Γ связана с продолжительностью жизни посредством $\Gamma \sim \hbar/\tau$ (см. (44,7)). Ширины квазидискретных уровней малы по сравнению с расстояниями между ними.

При рассмотрении квазистационарных состояний можно применить следующий формальный метод. До сих пор мы всегда рассматривали решения уравнения Шредингера с граничным условием, требующим конечности волновой функции на бесконечности. Вместо этого будем теперь искать решения, представляющие собой на бесконечности расходящуюся сферическую волну; это соответствует частице, вылетающей в конце концов из системы при ее распаде. Ввиду того, что такое граничное условие комплексно, нельзя уже утверждать, что собственные значения энергии должны быть вещественными. Напротив, в результате решения уравнения Шредингера мы получим набор комплексных значений, которые мы будем писать в виде

$$E = E_0 - \frac{i\Gamma}{2}, \qquad (134,1)$$

где E_0 и Γ — две положительные (см. ниже) величины.

Легко видеть, в чем заключается физический смысл комплексных значений энергии. Временной множитель волновой функции квазистационарного состояния имеет вид

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0t - \frac{\Gamma}{2\hbar}t\right).$$

Поэтому все вероятности, определяющиеся квадратами модуля волновой функции, затухают со временем по закону $\exp(-\Gamma t/\hbar)$ [1]).

[1]) Заметим, что отсюда видна физическая необходимость положительности Γ. Выполнение этого требования автоматически обеспечивается поставленным на бесконечности граничным условием к решению волнового уравнения или эквивалентным ему (см. § 130) правилом обхода в формулах теории возмущений. Пусть переходы с дискретного уровня n в состояния ν непрерывного спектра вызываются постоянным возмущением V. Тогда поправка второго порядка

В частности, по этому закону затухает и вероятность нахождения частицы «внутри системы».

Таким образом, Γ определяет продолжительность жизни состояния; вероятность распада в единицу времени равна

$$w = \frac{\Gamma}{\hbar}. \qquad (134,2)$$

На больших расстояниях волновая функция квазистационарного состояния (расходящаяся волна) содержит множитель

$$\exp\left[\frac{ir}{\hbar}\sqrt{2m\left(E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma\right)}\right],$$

экспоненциально возрастающий при $r \to \infty$ (мнимая часть корня отрицательна). Поэтому нормировочный интеграл $\int |\psi|^2 dV$ для этих функций расходится. Заметим, кстати, что этим обстоятельством разрешается кажущееся противоречие между затуханием квадрата $|\psi|^2$ со временем и тем, что нормировочный интеграл должен быть постоянной величиной, как это следует из волнового уравнения. Выясним вид волновой функции, описывающей движение частицы с энергией, близкой к одному из квазидискретных уровней системы.

Как и в § 128, напишем асимптотический (на больших расстояниях) вид радиальной части волновой функции в форме (128,1)

$$R_l = \frac{1}{r}\left[A_l(E)\exp\left(-\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}r\right) + \right.$$
$$\left. + B_l(E)\exp\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}r\right)\right] \qquad (134,3)$$

и будем рассматривать E как комплексную переменную. При вещественных положительных значениях E

$$R_l = \frac{1}{r}\left[A_l(E)e^{ikr} + B_l(E)e^{-ikr}\right], \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \qquad (134,4)$$

причем $A_l(E) = B_l^*(E)$ (см. (128,3), (128,4)); функция $B_l(E)$ берется здесь на верхней стороне разреза, проведенного вдоль правой вещественной полуоси.

к уровню энергии

$$E_n^{(2)} = \int \frac{|V_{n\nu}|^2 d\nu}{E_n^{(0)} - E_\nu + i0}$$

(ср. (38,10)). По правилу (43,10) находим отсюда

$$\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\,E_n^{(2)} = 2\pi \int |V_{n\nu}|^2 \delta\left(E_n^{(0)} - E_\nu\right) d\nu$$

в согласии с выражением (43,1) для вероятности перехода.

Условие, определяющее комплексные собственные значения энергии, заключается в отсутствии в асимптотическом выражении (134,3) сходящейся волны. Это означает, что при $E = E_0 - i\Gamma/2$ должен обратиться в нуль коэффициент $B_l(E)$:

$$B_l\left(E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma\right) = 0. \tag{134,5}$$

Таким образом, квазидискретные уровни энергии, как и истинные дискретные уровни, являются нулями функции $B_l(E)$. Однако, в отличие от нулей, соответствующих истинным уровням, они лежат не на физическом листе. Действительно, написав условие (134,5), мы подразумевали, что искомая волновая функция квазистационарного состояния возникает из того же члена в (134,3), который является расходящейся волной ($\sim e^{ikr}$) и при $E > 0$ (в (134,4)). Но точка $E = E_0 - i\Gamma/2$ расположена под правой вещественной полуосью. Попасть в нее с верхней стороны разреза (на которой определены коэффициенты в (134,4)), не уходя при этом с физического листа, можно лишь путем обхода вокруг точки $E = 0$. При этом, однако, $\sqrt{-E}$ изменит знак, так что расходящаяся волна превратится в сходящуюся. Следовательно, для сохранения расходящегося характера волны переход должен совершаться непосредственно вниз через разрез, так что мы попадем на другой, нефизический, лист.

Рассмотрим теперь вещественные положительные значения энергии, близкие к квазидискретному уровню (при этом, конечно, подразумевается малость Γ; в противном случае такая близость была бы вообще невозможна). Разложив функцию $B_l(E)$ по степеням разности $E - (E_0 - i\Gamma/2)$ и ограничиваясь членом первого порядка, напишем

$$B_l(E) = \left(E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma\right) b_l, \tag{134,6}$$

где b_l — постоянная. Подставив это в (134,4), получим следующее выражение для волновой функции состояния, близкого к квазистационарному:

$$R_l = \frac{1}{r}\left[\left(E - E_0 - \frac{i}{2}\Gamma\right) b_l^* e^{ikr} + \left(E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma\right) b_l e^{-ikr}\right]. \tag{134,7}$$

Фаза δ_l этой функции дается формулой

$$\exp(2i\delta_l) = \frac{E - E_0 - i\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma_0/2} \exp(2i\delta_l^{(0)}) =$$

$$= \left[1 - \frac{i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2}\right] \exp(2i\delta_l^{(0)}), \tag{134,8}$$

где

$$\exp(2i\delta_l^{(0)}) = (-1)^{l+1}\frac{b_l^*}{b_l}. \qquad (134,9)$$

При $|E-E_0| \gg \Gamma$ фаза δ_l совпадает с $\delta_l^{(0)}$, так что $\delta_l^{(0)}$ есть значение фазы вдали от резонанса.

В области резонанса δ_l сильно зависит от энергии. Переписав (134,8) с помощью формулы

$$\exp(2i\operatorname{arctg}\lambda) = \frac{\exp(i\operatorname{arctg}\lambda)}{\exp(-i\operatorname{arctg}\lambda)} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

в виде

$$\delta_l = \delta_l^{(0)} - \operatorname{arctg}\frac{\Gamma}{2(E-E_0)}, \qquad (134,10)$$

видим, что при прохождении через всю резонансную область (от $E \ll E_0$ до $E \gg E_0$) фаза меняется на π.

При $E = E_0 - i\Gamma/2$ функция (134,7) сводится к

$$R_l = -\frac{i\Gamma}{r} b_l^* e^{ikr}.$$

Если нормировать волновую функцию условием равенства единице интеграла от $|\psi|^2$ по области внутри системы, то полный поток в этой расходящейся волне, равный $v|i\Gamma b_l^*|^2$, должен совпадать с вероятностью распада (134,2). Отсюда найдем

$$|b_l|^2 = \frac{1}{\hbar v\Gamma}. \qquad (134,11)$$

Полученные результаты позволяют определить амплитуду упругого рассеяния частицы с энергией E, близкой к некоторому квазидискретному уровню составной системы, состоящей из рассеивающей системы вместе с рассеиваемой частицей. В общей формуле (123,11) в члене с тем значением l, которому соответствует уровень E_0, надо подставить выражение (134,8). Тогда получим

$$f(\theta) = f^{(0)}(\theta) - \frac{2l+1}{k}\,\frac{\Gamma/2}{E-E_0+i\Gamma/2}\exp(2i\delta_l^{(0)})\,P_l(\cos\theta), \qquad (134,12)$$

где $f^{(0)}(\theta)$ — амплитуда рассеяния вдали от резонанса, не зависящая от свойств квазистационарного состояния (она определяется формулой (123,11) с $\delta_l = \delta_l^{(0)}$ во всех членах суммы)[1]. Амплитуду $f^{(0)}(\theta)$ называют амплитудой *потенциального рассеяния*, а второй член в формуле (134,12) — амплитудой *резонансного рас-*

[1]) Если речь идет о рассеянии заряженной частицы на системе заряженных частиц, то для фаз $\delta_l^{(0)}$ надо воспользоваться выражением (135,11).

сеяния. Последняя имеет полюс при $E = E_0 - i\Gamma/2$, находящийся, согласно сказанному выше, на нефизическом листе [1]).

Формула (134,12) определяет упругое рассеяние в области резонанса на одном из квазидискретных уровней составной системы. Область ее применимости определяется требованием, чтобы разность $|E - E_0|$ была мала по сравнению с расстоянием D до соседних квазидискретных уровней

$$|E - E_0| \ll D. \tag{134,13}$$

Эта формула несколько упрощается, если речь идет о рассеянии медленных частиц, т. е. если длина волны частиц в резонансной области велика по сравнению с размерами рассеивающей системы. При этом существенно лишь s-рассеяние; будем считать, что уровень E_0 относится именно к движению с $l = 0$. Амплитуда потенциального рассеяния сводится теперь к вещественной постоянной $-\alpha$ (см. § 132) [2]). В амплитуде же резонансного рассеяния полагаем $l = 0$ и заменяем $\exp(2i\delta_0^{(0)})$ единицей, поскольку $\delta_0^{(0)} = -\alpha k \ll 1$. Таким образом, получаем

$$f(\theta) = -\alpha - \frac{\Gamma/2}{k(E - E_0 + i\Gamma/2)}. \tag{134,14}$$

В узкой области $|E - E_0| \sim \Gamma$ второй член велик по сравнению с амплитудой α и последняя должна быть опущена. Однако при удалении от точки резонанса оба члена могут сравняться.

В приведенных выводах молчаливо подразумевалось, что величина самого уровня E_0 не слишком мала, и резонансная область не находится в окрестности точки $E = 0$. Если же речь идет о резонансе на первом квазидискретном уровне составной системы, расположенном на расстоянии от точки $E = 0$, малом по сравнению с расстоянием до следующего уровня ($E_0 \ll D$), то разложение (134,6) может стать незаконным; это проявляется уже в том, что амплитуда (134,14) не стремится при $E \to 0$ к постоянному пределу, как это требовалось бы для s-рассеяния согласно общей теории.

Рассмотрим случай близкого к нулю квазидискретного уровня, снова предполагая, что в резонансной области рассеиваемые частицы настолько медленны, что существенно лишь s-рассеяние.

Разложение коэффициентов $B_l(E)$ волновой функции должно производиться теперь по степеням самой энергии E. Точка $E = 0$

---

1) Отметим, что формула (133,15) для резонансного рассеяния медленных частиц на положительном уровне ε с $l \neq 0$ при E, близких к ε, полностью соответствует резонансному члену в (134,12). При этом значения E_0 и Γ даются формулами (133,16), а ввиду малости E фаза $\delta_l^{(0)}$ мала, так что $\exp(2i\delta_l^{(0)}) \approx 1$.

2) Предполагается, что рассеивающее поле достаточно быстро убывает с расстоянием. В § 145 излагаемые результаты будут применены к рассеянию медленных нейтронов ядрами.

является точкой разветвления функций $B_l(E)$, причем обход вокруг нее с верхней на нижнюю сторону разреза превращает $B_l(E)$ в $B_l^*(E)$. Это значит, что разложение происходит по степеням $\sqrt{-E}$, меняющего знак при указанном обходе. Представим первые члены разложения функции $B_0(E)$ для вещественных положительных E в виде

$$B_0(E) = \left(E - \varepsilon_0 + i\gamma\sqrt{E}\right) b_0(E), \tag{134,15}$$

где ε_0 и γ — вещественные постоянные, а $b_0(E)$ — функция энергии, тоже разлагаемая по степеням $\sqrt{E}$, но не имеющая нулей вблизи точки $E = 0$ [1]). Квазидискретному уровню $E = E_0 - i\Gamma/2$ соответствует обращение в нуль множителя $E - \varepsilon_0 + i\gamma\sqrt{E}$, продолженного в нижнюю полуплоскость нефизического листа; поэтому для определения E_0 и Γ имеем уравнение

$$E_0 - \frac{i}{2}\Gamma - \varepsilon_0 + i\gamma\sqrt{E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma} = 0 \tag{134,16}$$

(постоянные ε_0 и γ должны быть положительными для того, чтобы были положительными E_0 и Γ). Так, уровню с шириной $\Gamma \ll E_0$ соответствует соотношение $\varepsilon_0 \gg \gamma^2$ между постоянными ε_0 и γ. При этом из (134,16) имеем $E_0 = \varepsilon_0$, $\Gamma = 2\gamma\sqrt{\varepsilon_0}$.

Выражение (134,15) заменяет собой в рассматриваемом случае формулу (134,6); соответствующим образом должны быть изменены дальнейшие формулы (надо заменить везде E_0 на ε_0 и Γ на $2\gamma\sqrt{E}$). Поэтому для амплитуды рассеяния получим вместо (134,14) следующее выражение:

$$f = -\alpha - \frac{\hbar\gamma}{\sqrt{2m}\left(E - \varepsilon_0 + i\gamma\sqrt{E}\right)} \tag{134,17}$$

(мы подставили здесь $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, где m — приведенная масса частицы и рассеивающей системы). При $E \to 0$ эта амплитуда стремится, как и следует, к постоянному пределу (тем самым оправдывается форма разложения (134,15)).

Отметим, что выражение вида (134,17) включает в себя также и случай близкого к нулю истинного дискретного уровня составной системы, получающийся при соответствующем соотношении между постоянными ε_0 и γ. Если $|\varepsilon_0| \ll \gamma^2$, то для энергий $E \ll \gamma^2$ в знаменателе резонансного члена можно пренебречь первым членом (E).

[1]) Функция $b_0(E)$ определяет, согласно (134,9), фазу потенциального рассеяния. При рассеянии медленных частиц первые члены ее разложения

$$b_0(E) = \text{const}\cdot i\,(1 + i\alpha k).$$

Пренебрегая также амплитудой потенциального рассеяния α, получим формулу

$$f = -\left[ik - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right]^{-1},$$

совпадающую с формулой (133,7) (причем $\varkappa = -\sqrt{2m}\varepsilon_0/\hbar\gamma$). Она соответствует резонансу на уровне $E = \varepsilon_0^2/\gamma^2$, являющемся истинным или виртуальным дискретным уровнем в зависимости от того, положительна или отрицательна постоянная $\varkappa$.

§ 135. Формула Резерфорда

Рассеяние в кулоновом поле представляет собой интерес с точки зрения физических применений. Оно интересно также и в том отношении, что для этого случая квантовомеханическая задача о столкновениях может быть решена до конца точно.

При наличии выделенного направления (в данном случае — направление падающей частицы) уравнение Шредингера в кулоновом поле удобно решать в параболических координатах ξ, η, φ (§ 37). Задача о рассеянии частицы в центральном поле обладает аксиальной симметрией. Поэтому волновая функция ψ не зависит от угла φ. Частное решение уравнения Шредингера (37,6) пишем в виде

$$\psi = f_1(\xi) f_2(\eta) \tag{135,1}$$

((37,7) с $m = 0$) и, соответственно этому, после разделения переменных получаем уравнения (37,8) с $m = 0$ [1]:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df_1}{d\xi}\right) + \left[\frac{k^2}{4}\xi - \beta_1\right]f_1 = 0,$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df_2}{d\eta}\right) + \left[\frac{k^2}{4}\eta - \beta_2\right]f_2 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \tag{135,2}$$

Энергия рассеиваемой частицы, разумеется, положительна; мы положили $E = k^2/2$. Знаки в уравнениях (135,2) соответствуют случаю поля отталкивания; для сечения рассеяния в поле притяжения получается в точности тот же окончательный результат.

Мы должны найти такое решение уравнения Шредингера, которое при отрицательных z и больших r имеет вид плоской волны:

$$\psi \sim e^{ikz} \quad \text{при} \quad -\infty < z < 0,\ r \to \infty,$$

что соответствует частице, падающей в положительном направлении оси z. Мы увидим из дальнейшего, что поставленному условию можно удовлетворить одним частным интегралом (135,1) (а не суммой интегралов с различными значениями β_1, β_2).

[1]) В этом параграфе пользуемся кулоновыми единицами (см. стр. 151).