Пренебрегая также амплитудой потенциального рассеяния α, получим формулу

$$f = -\left[ik - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right]^{-1},$$

совпадающую с формулой (133,7) (причем $\varkappa = -\sqrt{2m}\varepsilon_0/\hbar\gamma$). Она соответствует резонансу на уровне $E = \varepsilon_0^2/\gamma^2$, являющемся истинным или виртуальным дискретным уровнем в зависимости от того, положительна или отрицательна постоянная $\varkappa$.

§ 135. Формула Резерфорда

Рассеяние в кулоновом поле представляет собой интерес с точки зрения физических применений. Оно интересно также и в том отношении, что для этого случая квантовомеханическая задача о столкновениях может быть решена до конца точно.

При наличии выделенного направления (в данном случае — направление падающей частицы) уравнение Шредингера в кулоновом поле удобно решать в параболических координатах ξ, η, φ (§ 37). Задача о рассеянии частицы в центральном поле обладает аксиальной симметрией. Поэтому волновая функция ψ не зависит от угла φ. Частное решение уравнения Шредингера (37,6) пишем в виде

$$\psi = f_1(\xi)\, f_2(\eta) \tag{135,1}$$

((37,7) с $m = 0$) и, соответственно этому, после разделения переменных получаем уравнения (37,8) с $m = 0$ [1]:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df_1}{d\xi}\right) + \left[\frac{k^2}{4}\xi - \beta_1\right]f_1 = 0,$$
$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df_2}{d\eta}\right) + \left[\frac{k^2}{4}\eta - \beta_2\right]f_2 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \tag{135,2}$$

Энергия рассеиваемой частицы, разумеется, положительна; мы положили $E = k^2/2$. Знаки в уравнениях (135,2) соответствуют случаю поля отталкивания; для сечения рассеяния в поле притяжения получается в точности тот же окончательный результат.

Мы должны найти такое решение уравнения Шредингера, которое при отрицательных z и больших r имеет вид плоской волны:

$$\psi \sim e^{ikz} \quad \text{при} \quad -\infty < z < 0,\ r \to \infty,$$

что соответствует частице, падающей в положительном направлении оси z. Мы увидим из дальнейшего, что поставленному условию можно удовлетворить одним частным интегралом (135,1) (а не суммой интегралов с различными значениями β_1, β_2).

[1]) В этом параграфе пользуемся кулоновыми единицами (см. стр. 151).

В параболических координатах это условие имеет вид

$$\psi \sim e^{\frac{ik}{2}(\xi-\eta)} \quad \text{при } \eta \to \infty \text{ и всех } \xi.$$

Ему можно удовлетворить, только если

$$f_1(\xi) = e^{ik\xi/2}, \tag{135,3}$$

а $f_2(\eta)$ подчиняется условию

$$f_2(\eta) \sim e^{-ik\eta/2} \quad \text{при } \eta \to \infty. \tag{135,4}$$

Подставляя (135,3) в первое из уравнений (135,2), убеждаемся в том, что эта функция действительно удовлетворяет уравнению, если $\beta_1 = ik/2$. Второе из уравнений (135,2) с $\beta_2 = 1 - \beta_1$ приобретает тогда вид

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta \frac{df_2}{d\eta}\right) + \left(\frac{k^2}{4}\eta - 1 + \frac{ik}{2}\right) f_2 = 0.$$

Ищем его решение в виде

$$f_2(\eta) = e^{-ik\eta/2} w(\eta), \tag{135,5}$$

где функция $w(\eta)$ стремится к постоянному пределу при $\eta \to \infty$. Для $w(\eta)$ получаем уравнение

$$\eta w'' + (1 - ik\eta) w' - w = 0, \tag{135,6}$$

которое путем введения новой переменной $\eta_1 = ik\eta$ приводится к уравнению вырожденной гипергеометрической функции с параметрами $\alpha = -i/k$, $\gamma = 1$. Мы должны выбрать то из решений уравнения (135,6), которое, будучи умножено на $f_1(\xi)$, содержит в себе только расходящуюся (т. е. рассеянную), но не сходящуюся, сферическую волну. Таким решением будет функция

$$w = \text{const} \cdot F\left(-\frac{i}{k},\ 1,\ ik\eta\right).$$

Таким образом, собирая полученные выражения, находим следующее точное решение уравнения Шредингера, описывающее рассеяние:

$$\psi = e^{-\frac{\pi}{2k}} \Gamma\left(1 + \frac{i}{k}\right) e^{\frac{ik}{2}(\xi-\eta)} F\left(-\frac{i}{k},\ 1,\ ik\eta\right). \tag{135,7}$$

Мы выбрали нормировочную постоянную в ψ таким образом, чтобы падающая плоская волна имела единичную амплитуду (см. ниже).

Для того чтобы выделить в этой функции падающую и рассеянную волны, надо рассмотреть ее вид на больших расстояниях от центра. Воспользовавшись первыми двумя членами асимптотического разложения (d, 14) вырожденной гипергеометрической функции, получим при больших η

$$F\left(-\frac{i}{k},\ 1,\ ik\eta\right) \approx \frac{(-ik\eta)^{i/k}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right)}\left(1+\frac{1}{ik^3\eta}\right)+\frac{(ik\eta)^{-i/k}}{\Gamma\left(-\frac{i}{k}\right)}\frac{e^{ik\eta}}{ik\eta}=$$

$$=\frac{e^{\pi/2k}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right)}\left(1+\frac{1}{ik^3\eta}\right)e^{\frac{i}{k}\ln k\eta}-\frac{\frac{i}{k}e^{\pi/2k}}{\Gamma\left(1-\frac{i}{k}\right)}\frac{e^{ik\eta}}{ik\eta}e^{-\frac{i}{k}\ln k\eta}.$$

Подставив это в (135,7) и переходя к сферическим координатам ($\xi-\eta=2z$, $\eta=r-z=r(1-\cos\theta)$), получаем следующее окончательное асимптотическое выражение волновой функции:

$$\psi=\left[1+\frac{1}{ik^3r(1-\cos\theta)}\right]\exp\left\{ikz+\frac{i}{k}\ln\left[kr(1-\cos\theta)\right]\right\}+$$
$$+\frac{f(\theta)}{r}\exp\left\{ikr-\frac{i}{k}\ln(2kr)\right\},\qquad(135,8)$$

где

$$f(\theta)=-\frac{1}{2k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{i}{k}\right)}\exp\left(-\frac{2i}{k}\ln\sin\frac{\theta}{2}\right).\qquad(135,9)$$

Первый член в (135,8) представляет собой падающую волну. Мы видим, что в связи с медленностью спадания кулонова поля падающая плоская волна искажается даже на больших расстояниях от центра, как это показывает наличие логарифмического члена в фазе, а также члена порядка $1/r$ в амплитуде волны [1]). Искажающий логарифмический член в фазе имеется также в рассеянной сферической волне, изображающейся вторым членом в (135,8). Эти отличия от обычного асимптотического вида волновой функции (123,3), однако, несущественны, так как дают для плотности потока поправки, стремящиеся к нулю при $r\to\infty$.

[1]) Происхождение этого искажения можно уяснить уже из классической картины. Если рассмотреть семейство классических кулоновых гиперболических траекторий с одинаковым направлением падения (параллельным оси z), то уравнение нормальной к ним поверхности на больших расстояних от рассеивающего центра ($z\to-\infty$) стремится, как легко показать, не к $z=\text{const}$, а к $z+k^{-2}\ln k(r-z)=\text{const}$. Эта поверхность как раз и совпадает с поверхностью постоянной фазы падающей волны в (135,8).

Таким образом, получаем для сечения рассеяния $d\sigma = |f(\theta)|^2 do$ формулу

$$d\sigma = \frac{do}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

или, в обычных единицах,

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \qquad (135,10)$$

($v = k\hbar/m$ — скорость частицы). Эта формула совпадает с известной *формулой Резерфорда*, к которой приводит классическая механика. Таким образом, для рассеяния в кулоновом поле квантовая и классическая механика дают одинаковый результат (*N. Mott, W. Gordon*, 1928). Естественно, что и формула Борна (126,12) приводит к тому же выражению (135,10).

Приведем для справочных целей выражение амплитуды рассеяния (135,9), написанное в виде суммы по сферическим функциям. Оно получается подстановкой в (124,5) фаз из (36,28) [1]:

$$\exp\left(2i\delta_l^{\text{кул}}\right) = \frac{\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)}{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{k}\right)}. \qquad (135,11)$$

Таким образом, получим

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\frac{\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)}{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{k}\right)} P_l(\cos\theta). \qquad (135,12)$$

Знаки в амплитуде (135,9) соответствуют кулонову полю отталкивания. Для поля притяжения выражение (135,9) должно быть заменено комплексно сопряженным. В последнем случае $f(\theta)$ обращается в бесконечность в полюсах функции $\Gamma(1 - i/k)$, т. е. в точках, где аргумент Г-функции есть отрицательное целое число или нуль (при этом $\operatorname{Im} k > 0$ и функция $r\psi$ затухает на бесконечности). Соответствующие значения энергии

$$\frac{k^2}{2} = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots,$$

и совпадают с дискретными уровнями энергии в кулоновом поле притяжения (ср. § 128).

[1]) Величина $\delta_l^{\text{кул}}$ в этой формуле отличается от истинной (расходящейся) кулоновой фазы на величину, одинаковую для всех l.