должны быть заменены точными решениями волнового уравнения соответственно $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ и $\psi_{-\mathbf{k}}^{(+)} = (\psi_{\mathbf{k}}^{(-)})^*$; этим и доказывается правило (136,13).

Выбор $\psi_{\mathbf{k}}^{(-)}$ в качестве конечной волновой функции относится также и к случаям перехода из состояния дискретного в состояние непрерывного спектра (вопрос же о способе выбора ψ_i в этом случае естественно, не возникает).

§ 137. Столкновения одинаковых частиц

Особого рассмотрения требует случай столкновения двух одинаковых частиц. Тождественность частиц приводит в квантовой механике к появлению своеобразного обменного взаимодействия между ними. Оно существенно сказывается и на рассеянии (*N. Mott*, 1930)[1]).

Орбитальная волновая функция системы из двух частиц должна быть симметричной или антисимметричной относительно частиц в зависимости от того, четен или нечетен суммарный спин последних (см. § 62). Поэтому описывающая рассеяние волновая функция, получающаяся путем решения обычного уравнения Шредингера, должна быть симметризована или антисимметризована по частицам. Перестановка частиц эквивалентна замене направления соединяющего их радиуса-вектора на обратное. В системе координат, в которой покоится центр инерции, это означает, что r остается неизменным, а угол θ заменяется на $\pi - \theta$ (в связи с чем $z = r\cos\theta$ переходит в $-z$). Поэтому вместо асимптотического выражения (123,3) волновой функции мы должны писать

$$\psi = e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \frac{1}{r} e^{ikr} [f(\theta) \pm (\pi - \theta)]. \qquad (137,1)$$

В силу тождественности частиц нельзя, конечно, указать, которая из них есть рассеиваемая, а которая — рассеивающая. В системе центра инерции мы имеем две одинаковые распространяющиеся навстречу друг другу падающие волны: e^{ikz} и e^{-ikz}. Расходящаяся же сферическая волна в (137,1) учитывает рассеяние обеих частиц, и вычисленный с ее помощью поток определяет вероятность того, что в данном элементе do телесного угла будет рассеяна какая-либо из частиц. Сечение рассеяния есть отношение этого потока к плотности потока в каждой из падающих плоских волн, т. е. по-прежнему определяется квадратом модуля коэффициента при e^{ikr}/r в волновой функции (137,1).

[1]) Прямое спин-орбитальное взаимодействие здесь по-прежнему не рассматривается.

Таким образом, если суммарный спин сталкивающихся частиц четен, то сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma_s = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 do, \tag{137,2}$$

а если нечетен, то

$$d\sigma_a = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 do. \tag{137,3}$$

Характерно для обменного взаимодействия появление интерференционного члена $f(\theta) f^*(\pi - \theta) + f^*(\theta) f(\pi - \theta)$. Если бы частицы были различимы, как в обычной классической механике, то вероятность рассеяния какой-либо из них в данный элемент телесного угла do была бы равна просто сумме вероятностей отклонения одной из них на угол θ, а движущейся навстречу ей — на угол $\pi - \theta$; другими словами, сечение было бы равно

$$\{|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2\} do.$$

В предельном случае малых скоростей амплитуда рассеяния (при достаточно быстро убывающем с расстоянием взаимодействии частиц) стремится к постоянному, не зависящему от углов пределу (§ 132). Из (137,3) видно, что при этом $d\sigma_a$ обращается в нуль, т. е. рассеиваются друг на друге лишь частицы с четным суммарным спином.

В формулах (137,2), (137,3) предполагается, что суммарный спин сталкивающихся частиц имеет определенное значение. Если же частицы не находятся в определенных спиновых состояниях, то для определения сечения надо произвести усреднение, считая все спиновые состояния равновероятными.

В § 62 было показано, что из общего числа $(2s+1)^2$ различных спиновых состояний системы двух частиц со спином s $s(2s+1)$ состояний соответствует четному, а $(s+1)(2s+1)$ — нечетному полному спину (если s — полуцелое), или же наоборот (если s — целое). Предположим сначала, что спин s частиц — полуцелый. Тогда вероятность системе из обеих сталкивающихся частиц иметь четное S равна $\frac{s(2s+1)}{(2s+1)^2} = \frac{s}{2s+1}$, а вероятность нечетного S равна $\frac{s+1}{2s+1}$. Поэтому сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \frac{s}{2s+1} d\sigma_s + \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_a. \tag{137,4}$$

Подставив сюда (137,2), (137,3), получим

$$d\sigma = \left\{ |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \frac{1}{2s+1} [f(\theta) f(\pi - \theta)^* + f(\theta)^* f(\pi - \theta)] \right\} do. \tag{137,5}$$

Аналогичным образом получим при целом s

$$d\sigma=\Big\{|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2+\\ +\frac{1}{2s+1}[f(\theta)f(\pi-\theta)^*+f(\theta)^*f(\pi-\theta)]\Big\}do. \quad (137,6)$$

В качестве примера выпишем формулы для столкновения двух электронов, взаимодействующих по закону Кулона ($U=e^2/r$). Подстановка выражения (135,9) в формулу (137,5) с $s=1/2$ дает (в обычных единицах) после простого вычисления

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{m_0v^2}\right)^2\left[\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\right.\\ \left.\times\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v}\ln\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]do \quad (137,7)$$

(мы ввели массу m_0 электрона вместо приведенной массы $m=m_0/2$). Эта формула заметно упрощается, если скорость настолько велика, что $e^2\ll v\hbar$ (заметим, что это есть как раз условие применимости к кулоновому полю теории возмущений). Тогда косинус в третьем члене можно заменить единицей и получается

$$d\sigma=\left(\frac{2e^2}{m_0v^2}\right)^2\frac{4-3\sin^2\theta}{\sin^4\theta}do. \quad (137,8)$$

Противоположный предельный случай, $e^2\gg v\hbar$, соответствует переходу к классической механике (см. конец § 127). В формуле (137,7) этот переход происходит весьма своеобразно. При $e^2\gg v\hbar$ косинус в третьем члене в квадратных скобках есть быстро осциллирующая функция. При каждом данном θ формула (137,7) дает для сечения рассеяния значение, вообще говоря, заметно отличающееся от резерфордовского. Однако уже при усреднении по небольшому интервалу значений θ осциллирующий член в (137,7) исчезает, и мы приходим к классической формуле.

Все написанные формулы относятся к системе координат, в которой центр инерции покоится. Переход к системе, в которой до столкновения одна из частиц покоилась, осуществляется, согласно (123,2), просто путем замены θ на 2ϑ. Так, для столкновения электронов получим из (137,7)

$$d\sigma=\left(\frac{2e^2}{m_0v^2}\right)^2\left[\frac{1}{\sin^4\vartheta}+\frac{1}{\cos^4\vartheta}-\frac{1}{\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}\times\right.\\ \left.\times\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v}\ln\operatorname{tg}^2\vartheta\right)\right]\cos\vartheta\, do, \quad (137,9)$$

где do есть элемент телесного угла в новой системе координат (при замене θ на 2ϑ элемент телесного угла do надо заменить на $4\cos\vartheta\, do$, так как $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=4\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$).

Задача

Определить сечение рассеяния двух одинаковых частиц со спином 1/2, имеющих заданные средние значения спина $\bar{\mathbf{s}}_1$ и $\bar{\mathbf{s}}_2$.

Решение. Зависимость сечения от поляризаций частиц должна выражаться членом, пропорциональным скаляру $\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2$. Ищем $d\sigma$ в виде $a + b\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2$. Для неполяризованных частиц ($\bar{\mathbf{s}}_1 = \bar{\mathbf{s}}_2 = 0$) второй член отсутствует и, согласно (137,4), $d\sigma = a = (d\sigma_s + 3d\sigma_a)/4$. Если же обе частицы полностью поляризованы в одном направлении ($\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2 = 1/4$), то система заведомо находится в состоянии с $S = 1$; в этом случае, следовательно, $d\sigma = a + b/4 = d\sigma_a$. Определив из полученных двух равенств a и b, найдем

$$d\sigma = \frac{1}{4}(d\sigma_s + 3d\sigma_a) + (d\sigma_a - d\sigma_s)\,\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2.$$

§ 138. Резонансное рассеяние заряженных частиц

При рассеянии заряженных ядерных частиц (например, протонов протонами), наряду с короткодействующими ядерными силами, имеется также и медленно убывающее кулоново взаимодействие. Теория резонансного рассеяния строится в этом случае тем же методом, который был изложен в § 133. Разница заключается лишь в том, что в качестве волновых функций в области вне радиуса действия ядерных сил ($r \gg a$) надо пользоваться вместо решения уравнения свободного движения (133,2) точным общим решением уравнения Шредингера в кулоновом поле. При этом скорость частиц по-прежнему предполагается малой лишь настолько, что $ka \ll 1$; соотношение же между $1/k$ и кулоновой единицей длины $a_c = \hbar^2/mZ_1Z_2e^2$ (m — приведенная масса сталкивающихся частиц) может быть произвольным [1]).

При движении с $l = 0$ в кулоновом поле отталкивания уравнение Шредингера для радиальной функции $\chi = rR_0$ есть

$$\chi'' + \left(k^2 - \frac{2}{r}\right)\chi = 0 \qquad (138,1)$$

(мы пользуемся здесь кулоновыми единицами). В § 36 было найдено решение этого уравнения, подчиненное требованию конечности χ/r при $r = 0$. Это решение, которое мы обозначим здесь посредством F_0, имеет вид (см. (36,27)—(36,28))

$$F_0 = Ae^{ikr}krF\left(\frac{i}{k} + 1,\ 2,\ -2ikr\right), \quad A^2 = \frac{2\pi/k}{e^{2\pi/k} - 1}. \qquad (138,2)$$

Асимптотическое выражение этой функции на больших расстояниях есть

$$F_0 \approx \sin\left(kr - \frac{1}{k}\ln 2kr + \delta_0^{\text{кул}}\right), \quad \delta_0^{\text{кул}} = \arg\Gamma\left(1 + \frac{i}{k}\right), \qquad (138,3)$$

[1]) Излагаемая ниже теория была развита *Л. Д. Ландау* и *Я. А. Смородинским* (1944).