Задача

Определить сечение рассеяния двух одинаковых частиц со спином 1/2, имеющих заданные средние значения спина $\bar{\mathbf{s}}_1$ и $\bar{\mathbf{s}}_2$.

Решение. Зависимость сечения от поляризаций частиц должна выражаться членом, пропорциональным скаляру $\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2$. Ищем $d\sigma$ в виде $a+b\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2$. Для неполяризованных частиц ($\bar{\mathbf{s}}_1=\bar{\mathbf{s}}_2=0$) второй член отсутствует и, согласно (137,4), $d\sigma=a=(d\sigma_s+3d\sigma_a)/4$. Если же обе частицы полностью поляризованы в одном направлении ($\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2=1/4$), то система заведомо находится в состоянии с $S=1$; в этом случае, следовательно, $d\sigma=a+b/4=d\sigma_a$. Определив из полученных двух равенств a и b, найдем

$$d\sigma=\frac{1}{4}(d\sigma_s+3d\sigma_a)+(d\sigma_a-d\sigma_s)\,\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2.$$

§ 138. Резонансное рассеяние заряженных частиц

При рассеянии заряженных ядерных частиц (например, протонов протонами), наряду с короткодействующими ядерными силами, имеется также и медленно убывающее кулоново взаимодействие. Теория резонансного рассеяния строится в этом случае тем же методом, который был изложен в § 133. Разница заключается лишь в том, что в качестве волновых функций в области вне радиуса действия ядерных сил ($r\gg a$) надо пользоваться вместо решения уравнения свободного движения (133,2) точным общим решением уравнения Шредингера в кулоновом поле. При этом скорость частиц по-прежнему предполагается малой лишь настолько, что $ka\ll 1$; соотношение же между $1/k$ и кулоновой единицей длины $a_c=\hbar^2/mZ_1Z_2e^2$ (m — приведенная масса сталкивающихся частиц) может быть произвольным [1]).

При движении с $l=0$ в кулоновом поле отталкивания уравнение Шредингера для радиальной функции $\chi=rR_0$ есть

$$\chi''+\left(k^2-\frac{2}{r}\right)\chi=0 \tag{138,1}$$

(мы пользуемся здесь кулоновыми единицами). В § 36 было найдено решение этого уравнения, подчиненное требованию конечности χ/r при $r=0$. Это решение, которое мы обозначим здесь посредством F_0, имеет вид (см. (36,27)—(36,28))

$$F_0=Ae^{ikr}krF\left(\frac{i}{k}+1,\ 2,\ -2ikr\right),\quad A^2=\frac{2\pi/k}{e^{2\pi/k}-1}. \tag{138,2}$$

Асимптотическое выражение этой функции на больших расстояниях есть

$$F_0\approx\sin\left(kr-\frac{1}{k}\ln 2kr+\delta_0^{\text{кул}}\right),\quad \delta_0^{\text{кул}}=\arg\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right), \tag{138,3}$$

[1]) Излагаемая ниже теория была развита *Л. Д. Ландау* и *Я. А. Смородинским* (1944).

а первые члены разложения при малых r ($kr \ll 1$, $r \ll 1$)

$$F_0 = Akr\,(1 + r + \ldots). \tag{138,4}$$

Теперь, однако, при изменившемся граничном условии поведение функции в нуле становится несущественным и нам нужно общее решение уравнения (138,1), представляющее собой линейную комбинацию двух его независимых интегралов.

Параметры вырожденной гипергеометрической функции в (138,2) таковы (целое значение параметра $\gamma = 2$), что мы имеем дело как раз со случаем, упомянутым в конце § d математических дополнений. В соответствии со сделанными там указаниями мы получим второй интеграл уравнения (138,1), заменив функцию F в (138,2) какой-либо другой линейной комбинацией двух членов, сумма которых дает, согласно (d,14), вырожденную гипергеометрическую функцию. Выбрав в качестве такой комбинации разность этих членов, получим второе независимое решение уравнения (138,1) (обозначим его как G_0) в виде [1])

$$G_0 = 2\,\mathrm{Im}\,\frac{Ae^{-ikr}kr}{\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right)}(-2ikr)^{-1+\frac{i}{k}}G\left(1-\frac{i}{k},\ -\frac{i}{k},\ -2ikr\right) \tag{138,5}$$

(функция же F_0 является вещественной частью стоящего здесь выражения). Его асимптотический вид на больших расстояниях

$$G_0 \approx \cos\left(kr - \frac{1}{k}\ln 2kr + \delta_0^{\text{кул}}\right), \tag{138,6}$$

а первые члены разложения при малых r

$$G_0 = \frac{1}{A}\{1 + 2r\,[\ln 2r + 2C - 1 + h(k)] + \ldots\}, \tag{138,7}$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера, а $h(k)$ обозначает функцию

$$h(k) = \mathrm{Re}\,\psi\left(-\frac{i}{k}\right) + \ln k \tag{138,8}$$

(где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная Γ-функции) [2]).

Общий интеграл уравнения (138,1) напишем в виде суммы

$$\chi = \mathrm{const}\cdot(F_0 \operatorname{ctg}\delta_0 + G_0), \tag{138,9}$$

[1]) Функции F_0 и G_0 (как и определенные аналогичным образом функции F_l и G_l с $l \neq 0$) называют соответственно регулярной и нерегулярной кулоновыми функциями.

[2]) Разложение (138,7) получается из (138,5) с помощью разложения (d, 17). При этом использованы известное соотношение

$$\psi(1+z) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

(которое легко получить из $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$) и значения $\psi(1) = -C$, $\psi(2) = -C + 1$.

где $\operatorname{ctg}\delta_0$ — постоянная. Обозначение этой постоянной выбрано так, что асимптотический вид этого решения будет

$$\chi \propto \sin\left(kr - \frac{1}{k}\ln 2kr + \delta_0^{\text{кул}} + \delta_0\right). \qquad (138,10)$$

Таким образом, δ_0 есть дополнительный сдвиг фазы волновой функции, обусловленный короткодействующими силами. Мы должны связать его с постоянной, фигурирующей в граничном условии $(\chi'/\chi)|_{r\to 0} = \text{const}$, заменяющем собой рассмотрение волновой функции в области действия ядерных сил. Однако, ввиду расходимости (как $\ln r$) логарифмической производной χ'/χ при $r \to 0$, это условие должно быть отнесено теперь не к нулю, а к некоторому сколь угодно малому, но все же конечному значению $r = \rho$. Вычисляя (с помощью формул (138,4) и (138,7)) производную $\chi'(\rho)/\chi(\rho)$ и приравнивая ее постоянной, получим граничное условие в виде

$$kA^2 \operatorname{ctg}\delta_0 + 2\,[\ln 2\rho + 2C + h(k)] = \text{const}.$$

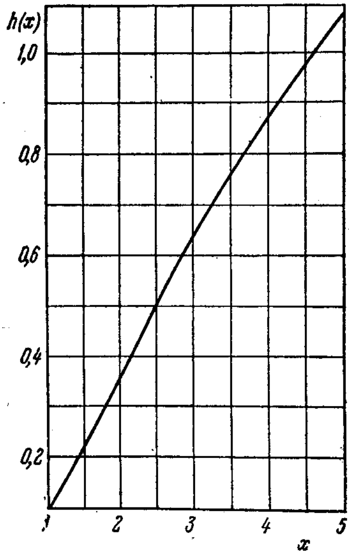

Рис. 49

Выражение в левой стороне равенства содержит не зависящие от k постоянные $2\ln 2\rho + 4C$; включим их в const, обозначив ее после этого через $-\varkappa$. В результате получим окончательное выражение для $\operatorname{ctg}\delta_0$, которое мы выпишем здесь в обычных единицах:

$$\operatorname{ctg}\delta_0 = -\frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi/ka_c} - 1\right)\left[h(ka_c) + \frac{\varkappa a_c}{2}\right]. \qquad (138,11)$$

[1]) Для вычисления функции $h(k)$ можно пользоваться формулой

$$h(k) = k^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+k^{-2})} - C + \ln k,$$

которую легко получить с помощью формулы

$$\psi(z) = -C - \frac{1}{z} + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+z)}$$

(см. *Э. Уиттекер и Дж. Ватсон*. Курс современного анализа, т. II § 12.16, Физматгиз, 1963). Предельные выражения функции $h(k)$:

$$h(k) \approx \frac{k^2}{12} \text{ при } k \ll 1, \quad h(k) = -C + \ln k + \frac{1,2}{k^2} \text{ при } k \gg 1$$

(последняя формула дает правильные, с погрешностью $<4\%$, значения $h(k)$ уже при $k > 2,5$).

В пределе $1/a_c \to 0$, т. е. при переходе к незаряженным частицам, формула (138,11) переходит в соотношение $\operatorname{ctg}\delta_0 = -\varkappa/k$, совпадающее с (133,6). На рис. 49 дан график функции $h(x)$ [1].

Таким образом, при наличии кулонова взаимодействия «постоянной» оказывается следующая величина:

$$\frac{2\pi\operatorname{ctg}\delta_0}{a_c\left(e^{2\pi/ka_c}-1\right)}+\frac{2}{a_c}h(ka_c)=-\varkappa. \qquad (138,12)$$

Мы поставили слово «постоянная» в кавычки, поскольку $\varkappa$ представляет собой в действительности первый член разложения по степени малой величины ka некоторой функции, зависящей от свойств короткодействующих сил. Резонансу при малых энергиях соответствует, как было указано в § 133, случай аномально малого значения постоянной $\varkappa$. Ввиду этого для улучшения точности следует учесть также и следующий ($\sim k^2$) член разложения, содержащий коэффициент «нормального» порядка величины, т. е. надо заменить в (138,12) $-\varkappa$ на [1])

$$-\varkappa_0+\frac{1}{2}r_0k^2.$$

Наличие резонанса может быть связано, как было указано в § 133, с существованием как истинного, так и виртуального дискретного связанного состояния системы. Можно показать [2]), что критерием истинности или виртуальности уровня по-прежнему является знак постоянной $\varkappa$.

Полные фазовые сдвиги волновых функций, согласно (138,10), равны суммам $\delta_l^{\text{кул}}+\delta_l$. Поэтому сечение рассеяния

$$f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[\exp\left(2i\delta_l^{\text{кул}}+2i\delta_l\right)-1\right]P_l(\cos\theta). \qquad (138,13)$$

Разность в квадратных скобках представим в виде

$$\exp\left(2i\delta_l^{\text{кул}}+2i\delta_l\right)-1=\left[\exp\left(2i\delta_l^{\text{кул}}\right)-1\right]+\\+\left[\exp\left(2i\delta_l^{\text{кул}}\right)\left(e^{2i\delta_l}-1\right)\right]. \qquad (138,14)$$

Кулоновы фазы $\delta_l^{\text{кул}}$ вносят одинаковый по порядку величины вклад в амплитуду рассеяния при всех l. Фазы же δ_l, связанные с короткодействующими силами, при $l\neq 0$ малы (при малых энергиях). Поэтому при подстановке (138,14) в (138,13) первую скобку оставляем во всех членах суммы; эти члены суммируются

[1]) Укажем значения постоянных $\alpha = 1/\varkappa_0$ и r_0 для рассеяния протона на протоне: $\alpha = -7{,}8\cdot 10^{-13}$, $r_0 = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ см (кулонова единица длины $2\hbar^2/m_pe^2 = 57{,}6\cdot 10^{-13}$ см). Эти значения относятся к паре протонов с антипараллельными спинами (при параллельных спинах система двух протонов, в силу принципа Паули, вообще не может находиться в s-состоянии).

[2]) См. *Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский*, ЖЭТФ 14, 269 (1944).

в кулонову амплитуду рассеяния (135,9)

$$f_{\text{кул}}(\theta) = -\frac{1}{2a_c k^2 \sin^2(\theta/2)} \exp\left(-\frac{2i}{ka_c}\ln\sin\frac{\theta}{2} + 2i\delta_0^{\text{кул}}\right). \tag{138,15}$$

Вторую же скобку в (138,14) сохраняем только в члене с $l = 0$. Таким образом, полная амплитуда рассеяния представится в виде

$$f(\theta) = f_{\text{кул}}(\theta) + \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_0} - 1)\exp(2i\delta_0^{\text{кул}}). \tag{138,16}$$

Второй член в этом выражении можно назвать амплитудой ядерного рассеяния. Следует, однако, подчеркнуть, что такое разделение условно: ввиду определения δ_0, согласно (138,11), наличие кулонова взаимодействия существенно сказывается и на этом члене, который оказывается совершенно отличным от того, что было бы при тех же короткодействующих силах для незаряженных частиц. В частности, при $ka_c \to 0$ фаза δ_0, а с нею и весь второй член в (138,16) стремятся экспоненциально (как $\exp(-2\pi/ka_c)$) к нулю, т. е. ядерное рассеяние полностью маскируется кулоновым отталкиванием.

В сечении рассеяния обе части амплитуды интерферируют друг с другом:

$$\frac{d\sigma}{do} = |f(\theta)|^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2}\right)^2 \times \left[\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} - \frac{4ka}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\delta_0\cos\left(\frac{2}{ka_c}\ln\sin\frac{\theta}{2} + \delta_0\right) + 4(ka_c)^2\sin\delta_0^2\right]. \tag{138,17}$$

Здесь предполагается, что сталкивающиеся частицы различны; для одинаковых частиц амплитуда рассеяния должна была бы быть перед возведением в квадрат предварительно симметризована (ср. § 137).

§ 139. Упругие столкновения быстрых электронов с атомами

Упругие столкновения быстрых электронов с атомами могут быть рассмотрены с помощью борновского приближения, если скорость падающего электрона велика по сравнению со скоростями атомных электронов.

Ввиду большой разницы в массах между электроном и атомом последний можно считать при столкновении неподвижным, и система координат, в которой неподвижен центр инерции, совпадает с системой, в которой неподвижен атом. Тогда $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ в формуле (126,7) обозначают импульсы электрона до и после столкновения, m — масса электрона, а угол θ совпадает с углом ϑ отклонения электрона. Потенциальная же энергия $U(r)$ в формуле (126,7) требует должного определения.