и интегрируем по dq от 0 до $2v$; поскольку, однако, v предполагается большим, а интеграл сходится, верхний предел можно заменить бесконечностью. В результате получим

$$\sigma = \frac{7\pi}{3v^2}.$$

Транспортное сечение вычисляется как интеграл

$$\sigma_{tr} = \frac{1}{2v^2}\int q^2\, d\sigma.$$

Заменив переменную интегрирования, согласно $4 + q^2 = u$, и заменив везде, кроме члена du/u, верхний предел бесконечностью, получим

$$\sigma_{tr} = \frac{4\pi}{v^4}\left(\ln v + \frac{1}{12}\right)$$

в соответствии с (139,8).

§ 140. Рассеяние при спин-орбитальном взаимодействии

До сих пор мы рассматривали лишь столкновения частиц, взаимодействие которых не зависит от их спинов. В этих условиях спины либо вообще не влияют на процесс рассеяния, либо оказывают косвенное влияние, связанное с обменными эффектами (§ 137).

Обратимся теперь к обобщению развитой в § 123 общей теории рассеяния на случай, когда взаимодействие частиц существенно зависит от их спинов, как это имеет место при столкновениях ядерных частиц.

Рассмотрим подробно наиболее простой случай, когда одна из сталкивающихся частиц (для определенности будем считать, что это — частица падающего пучка) имеет спин 1/2, а другая (частица-мишень) — спин 0.

При заданном (полуцелом) полном моменте системы j орбитальный момент может иметь лишь два значения $l = j \pm 1/2$, которым соответствуют состояния различной четности. Поэтому из сохранения $\mathbf{j}$ и четности в этом случае следует также и сохранение абсолютной величины орбитального момента.

Оператор $\hat{f}$ (§ 125) действует теперь не только на орбитальные, но и на спиновые переменные волновой функции системы. Он должен быть коммутативен с оператором сохраняющейся величины $\mathbf{l}^2$. Наиболее общий вид такого оператора

$$\hat{f} = \hat{a} + \hat{b}\,\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}}, \tag{140,1}$$

где $\hat{a}$, $\hat{b}$ — орбитальные операторы, зависящие только от $\mathbf{l}^2$.

S-матрица, а с нею и матрица оператора $\hat{f}$ диагональны по отношению к волновым функциям состояний с определенными значениями сохраняющихся величин l и j (и проекции m полного момента), причем диагональные элементы выражаются через фазы δ волновых функций формулой (123,15). При заданных l и полном моменте $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$ собственные значения $\mathbf{ls}$ равны соответственно $l/2$ и $-(l+1)/2$ (см. (118,5)). Поэтому для определения диагональных матричных элементов операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ (обозначим их a_l и b_l) имеем соотношения

$$a_l + \frac{l}{2} b_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l^+} - 1\right), \quad a_l - \frac{l+1}{2} b_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l^-} - 1\right), \tag{140,2}$$

где фазы δ_l^+ и δ_l^- соответствуют состояниям с $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$.

Нас интересуют, однако, не сами по себе диагональные элементы оператора $\hat{f}$ по отношению к состояниям с заданными l и j, а амплитуда рассеяния как функция направлений падающей и рассеянной волн. Эта амплитуда будет все еще оператором, но уже только по отношению к спиновым переменным — оператором, недиагональным по проекции спина σ. Ниже в этом параграфе мы будем обозначать буквой $\hat{f}$ именно такой оператор.

Для его нахождения надо воздействовать оператором (140,1) на функцию (125,17), соответствующую падающей (вдоль оси z) плоской волне. Таким образом,

$$\hat{f} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\left(a_l + b_l \hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}}\right) P_l(\cos\theta). \tag{140,3}$$

Здесь надо еще вычислить результат воздействия оператора $\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}}$ на функцию $P_l(\cos\theta)$. Это можно сделать, написав

$$\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\left(\hat{l}_+\hat{s}_- + \hat{l}_-\hat{s}_+\right) + \hat{l}_z\hat{s}_z$$

(см. (29,11)) и воспользовавшись формулами (27,12) для матричных элементов операторов $\hat{l}_\pm$; еще проще воспользоваться непосредственно операторными выражениями (26,14), (26,15). Простое вычисление дает

$$\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}} P_l(\cos\theta) = i\boldsymbol{\nu}\hat{\mathbf{s}} P_l^1(\cos\theta),$$

где P_l^1 — присоединенный полином Лежандра, а $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{nn}']$, перпендикулярном к плоскости рассеяния ($\mathbf{n}$ — направление падения вдоль оси z; $\mathbf{n}'$ — направление рассеяния, определяемое сферическими углами θ, φ).

Определив a_l, b_l из (140,2) и подставив в (140,3), получим теперь окончательно

$$\hat{f} = A + 2B\mathbf{v}\hat{\mathbf{s}}, \tag{140,4}$$

$$A = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}\left[(l+1)\left(e^{2i\delta_l^+} - 1\right) + l\left(e^{2i\delta_l^-} - 1\right)\right]P_l(\cos\theta),$$
$$B = \frac{1}{2k}\sum_{l=1}^{\infty}\left(e^{2i\delta_l^+} - e^{2i\delta_l^-}\right)P_l^1(\cos\theta). \tag{140,5}$$

Матричные элементы этого оператора дают амплитуду рассеяния с определенными значениями проекции спина в начальном (σ) и конечном (σ') состояниях. Рассмотрим сечение, просуммированное по всем возможным значениям σ' и усредненное по вероятностям различных значений σ в начальном состоянии (в падающем пучке частиц). Такое сечение вычисляется как

$$d\sigma = \overline{(\hat{f}^+\hat{f})_{\sigma\sigma}}\, do; \tag{140,6}$$

взятием диагональных матричных элементов от произведения $\hat{f}^+\hat{f}$ достигается суммирование по конечным состояниям, а черта означает усреднение по начальному состоянию[1]). Если в начальном состоянии все направления спина равновероятны, то это усреднение сводится к взятию следа матрицы (деленного на число возможных значений проекции спина σ)

$$d\sigma = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\hat{f}^+\hat{f})\, do. \tag{140,7}$$

При подстановке (140,4) в (140,6) среднее значение квадрата $(\mathbf{v}\mathbf{s})^2$ вычисляется как $\mathbf{v}^2\mathbf{s}^2/3 = s(s+1)/3 = 1/4$. В результате получим

$$\frac{d\sigma}{do} = |A|^2 + |B|^2 + 2\operatorname{Re}(AB^*)\,\mathbf{v}\mathbf{P}, \tag{140,8}$$

где $\mathbf{P} = 2\bar{\mathbf{s}}$ — начальная поляризация пучка, определенная как отношение среднего спина в начальном состоянии к его наибольшему возможному значению (1/2). Напомним, что в случае спина 1/2 вектор $\bar{\mathbf{s}}$ полностью характеризует спиновое состояние (§ 59).

[1]) Если квадрат модуля $|f_{0n}|^2$ матричного элемента какого-либо оператора для перехода $0 \to n$ суммируется по конечным состояниям n, то получается

$$\sum_n |f_{0n}|^2 = \sum_n f_{0n}(f_{0n})^* = \sum_n f_{0n}(f^+)_{n0} = (ff^+)_{00}.$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, что знак сопряжения $^+$ в (140,6) и везде ниже относится к $\hat{f}$ как спиновому оператору и, в частности, не подразумевает транспонирования $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$.

Обратим внимание на то, что поляризация падающего пучка приводит к азимутальной асимметрии рассеяния: благодаря множителю $\boldsymbol{\nu}\mathbf{P}$ в последнем члене сечение (140,8) зависит не только от полярного угла θ, но и от азимута φ вектора $\mathbf{n}'$ по отношению к $\mathbf{n}$ (если только поляризация не перпендикулярна к $\boldsymbol{\nu}$, так что $\boldsymbol{\nu}\mathbf{P} \neq 0$).

Поляризация рассеянных частиц может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{P}' = \frac{2\,\overline{(f^+\mathbf{s}f)_{\sigma\sigma}}}{\overline{(f^+f)_{\sigma\sigma}}}. \tag{140,9}$$

Так, если начальное состояние не поляризовано ($\mathbf{P} = 0$), то простое вычисление дает

$$\mathbf{P}' = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}\boldsymbol{\nu}. \tag{140,10}$$

Таким образом, рассеяние приводит, вообще говоря, к появлению поляризации, перпендикулярной к плоскости рассеяния. Отметим, однако, что этот эффект отсутствует в борновском приближении: если все фазы δ малы, то в первом приближении по ним коэффициент A — вещественный, а B — чисто мнимый, так что $\mathrm{Re}\,(AB^*) = 0$.

Тот факт, что поляризация $\mathbf{P}'$ (140,10) направлена вдоль $\boldsymbol{\nu}$, заранее очевиден: $\mathbf{P}'$ есть аксиальный вектор, а $\boldsymbol{\nu}$ — единственный аксиальный вектор, который может быть составлен из имеющихся в нашем распоряжении полярных векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Очевидно поэтому, что этим свойством будет обладать также и поляризация, возникающая при рассеянии неполяризованного пучка частиц со спином 1/2 на неполяризованной мишени из ядер с любым (а не только нулевым) спином [1]).

В формулировке теоремы взаимности для рассеяния при наличии спинов следует учесть, что обращение времени меняет знаки не только импульсов, но и моментов. Поэтому симметрия рассеяния по отношению к обращению времени должна выражаться в этом случае равенством амплитуд процессов, отличающихся друг от друга не только перестановкой начального и конечного состояний и изменением направлений движения на обратные, но также и изменением знаков проекций спинов частиц в обоих состояниях. При этом, однако, знаки этих амплитуд могут оказаться различными в связи с тем, что обращение по времени вносит, согласно (60,3), в спиновую волновую функцию

---

[1]) Мы имеем здесь в виду мишень из ядер с полностью беспорядочно распределенными направлениями спинов. Напомним, что при $s > 1/2$ среднее значение вектора спина не определяет полностью спиновое состояние и его равенство нулю не означает еще полного отсутствия упорядочения спинов.

множитель $(-1)^{s-\sigma}$. Это обстоятельство приводит к тому, что теорема взаимности должна формулироваться следующим образом [1]:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \mathbf{n}; \sigma_1', \sigma_2', \mathbf{n}') =$$
$$= (-1)^{\Sigma(s-\sigma)} f(-\sigma_1', -\sigma_2', -\mathbf{n}'; -\sigma_1, -\sigma_2, -\mathbf{n}). \quad (140{,}11)$$

Здесь $f(\sigma_1, \sigma_2, \mathbf{n}; \sigma_1', \sigma_2', \mathbf{n}')$ — амплитуда рассеяния с изменением проекций спинов сталкивающихся частиц от значений σ_1, σ_2 к значениям σ_1', σ_2'; сумма в показателе степени берется по обеим частицам до и после рассеяния.

В борновском приближении рассеяние обладает дополнительной симметрией — оказываются одинаковыми вероятности процессов, отличающихся друг от друга перестановкой начального и конечного состояний, без изменения знаков импульсов и проекций спинов частиц, как при обращении времени (§ 126). Комбинируя это свойство с теоремой взаимности, найдем, что рассеяние симметрично по отношению к изменению знаков всех импульсов и проекций спинов, без их перестановки. Отсюда легко заключить, что в борновском приближении невозможно возникновение поляризации при рассеянии любого неполяризованного пучка на неполяризованной мишени. Действительно, при указанном преобразовании вектор поляризации $\mathbf{P}$ меняет знак, а единственный вектор $[\mathbf{kk}']$, вдоль которого может быть направлен $\mathbf{P}$, остается неизменным. Таким образом, свойство, отмеченное выше для рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 0, имеет в действительности общий характер.

В случае произвольных спинов сталкивающихся частиц общие формулы для угловых распределений весьма громоздки, и мы не станем останавливаться здесь на их выводе. Подсчитаем лишь число параметров, которыми должны определяться эти распределения.

Рассмотренный выше случай столкновения частиц со спинами 1/2 и 0 характерен, в частности, тем, что заданным значениям j и четности соответствует всего одно состояние системы двух частиц (отвлекаясь от несущественной ориентации полного момента в пространстве). От каждого такого состояния в амплитуду рассеяния входит один вещественный параметр (фаза δ). В случае же других спинов существует, вообще говоря, по нескольку различных состояний с одинаковыми полным моментом J и четностью; эти состояния различаются значениями полного спина частиц S и орбитального момента их относительного дви-

[1]) Вывод этого соотношения аналогичен выводу формулы (125,12). При этом в амплитуды сходящихся и расходящихся волн в волновой функции должны быть введены спиновые множители и вместо (125,10) получается условие $\hat{K}^{-1}\tilde{\hat{S}}\hat{K} = \hat{S}$, где $\hat{K}$ — оператор, не только производящий инверсию, но и преобразующий спиновое состояние согласно (60,3).

жения l. Пусть число таких состояний будет n. Легко видеть, что от каждой такой группы состояний в амплитуду рассеяния входит $n(n+1)/2$ независимых вещественных параметров.

Действительно, по отношению к этим состояниям S-матрица представляет собой унитарную симметричную (в силу теоремы взаимности) матрицу с $n \cdot n$ комплексными элементами. Подсчет числа независимых величин в этой матрице удобно произвести, заметив, что если представить оператор $\hat{S}$ в виде $\hat{S} = \exp(i\hat{R})$, то условие унитарности выполняется автоматически, когда $\hat{R}$ — произвольный эрмитов оператор (см. (12,13)). Если матрица $\hat{S}$ симметрична, то симметрична и матрица $\hat{R}$ и, будучи эрмитовой, она вещественна. Вещественная же симметричная матрица имеет $n(n+1)/2$ независимых компонент.

Для примера укажем, что для двух частиц со спинами 1/2 число $n = 2$. Действительно, при заданном J имеется всего четыре состояния: два состояния с $l = J$ и полным спином $S = 0$ или 1 и два состояния с $l = J \pm 1$, $S = 1$. Очевидно, что два из них четны (l четно) и два — нечетны (нечетные l).

Общий вид амплитуды рассеяния частиц со спином 1/2, как оператора по спиновым переменным обеих частиц, легко написать, исходя из необходимых условий инвариантности: это должен быть скаляр, инвариантный по отношению к обращению времени. Для составления этого выражения в нашем распоряжении имеются два аксиальных вектора спинов частиц $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ и два обычных (полярных) вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. При этом каждый из операторов $\hat{\mathbf{s}}_1$ и $\hat{\mathbf{s}}_2$ должен входить в амплитуду линейно, поскольку всякая вообще функция оператора спина 1/2 сводится к линейной. Наиболее общий вид оператора, удовлетворяющего этим условиям, можно представить в виде

$$\hat{f} = A + B(\hat{\mathbf{s}}_1\boldsymbol{\lambda})(\hat{\mathbf{s}}_2\boldsymbol{\lambda}) + C(\hat{\mathbf{s}}_1\boldsymbol{\mu})(\hat{\mathbf{s}}_2\boldsymbol{\mu}) + D(\hat{\mathbf{s}}_1\boldsymbol{\nu})(\hat{\mathbf{s}}_2\boldsymbol{\nu}) + \\ + E(\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2, \boldsymbol{\nu}) + F(\hat{\mathbf{s}}_1 - \hat{\mathbf{s}}_2, \boldsymbol{\nu}). \quad (140,12)$$

Коэффициенты A, B, ... — скалярные величины, которые могут зависеть только от скаляра $\mathbf{nn}'$, т. е. от угла рассеяния θ (и от энергии); $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ — три взаимно перпендикулярных единичных вектора, направленных соответственно вдоль $\mathbf{n} + \mathbf{n}'$, $\mathbf{n} - \mathbf{n}'$ и $[\mathbf{nn}']$. Операции обращения времени соответствует замена

$$\mathbf{s}_1 \to -\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{s}_2 \to -\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{n} \to -\mathbf{n}', \quad \mathbf{n}' \to -\mathbf{n}.$$

При этом

$$\boldsymbol{\lambda} \to -\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\mu} \to \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$$

и инвариантность оператора (140,12) очевидна.

В случае взаимного рассеяния нуклонов (протонов и нейтронов) последний член (140,12) отсутствует. Это следует уже хотя бы из того, что действующие между нуклонами ядерные силы сохраняют абсолютную величину полного спина системы S; оператор же $\hat{\mathbf{s}}_1-\hat{\mathbf{s}}_2$ не коммутирует с оператором $\hat{\mathbf{S}}^2$ (остальные члены в (140,12) выражаются, согласно (117,4), через оператор полного спина $\hat{\mathbf{S}}$ и потому коммутируют с $\hat{\mathbf{S}}^2$). При рассеянии одинаковых нуклонов (pp или nn) коэффициенты A, B, ... как функции угла рассеяния удовлетворяют также определенным соотношениям симметрии, являющимся следствием тождественности обеих частиц (см. задачу 2).

Задачи

1. Для рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 0 определить поляризацию после рассеяния, если до рассеяния она тоже была отлична от нуля.

Решение. Вычисление по формуле (140,9) удобно производить в компонентах, выбрав ось z вдоль направления $\mathbf{v}$. В результате получим

$$\mathbf{P}'=\frac{(|A|^2-|B|^2)\,\mathbf{P}+2|B|^2\,\mathbf{v}\,(\mathbf{vP})+2\,\mathrm{Im}\,(AB^*)\,[\mathbf{vP}]+2\mathbf{v}\,\mathrm{Re}\,(AB^*)}{|A|^2+|B|^2+2\,\mathrm{Re}\,(AB^*)\,\mathbf{vP}}.$$

2. Найти условия симметрии, которым удовлетворяют как функции угла θ коэффициенты в амплитуде рассеяния двух одинаковых нуклонов (*R. Oehme*, 1955).

Решение. Перегруппируем члены в (140,12) таким образом, чтобы каждый из них был отличен от нуля лишь для синглетных ($S=0$) или триплетных ($S=1$) состояний системы нуклонов:

$$\hat{f}=a\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2-\frac{1}{4}\right)+b\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2+\frac{3}{4}\right)+c\left[\frac{1}{4}+(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{v})\,(\hat{\mathbf{s}}_2\,\mathbf{v})\right]+$$
$$+d\,[(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})\,(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}')+(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n}')\,(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n})]+e\,(\hat{\mathbf{s}}_1+\hat{\mathbf{s}}_2,\,\mathbf{v}). \qquad (1)$$

С помощью формул (117,4) легко убедиться, что первый член отличен от нуля лишь при $S=0$, а остальные — при $S=1$. В силу тождественности частиц амплитуда рассеяния должна быть симметрична относительно перестановки координат частиц при $S=0$ и антисимметрична при $S=1$; это преобразование означает замену $\theta\to\pi-\theta$ или, что то же, изменение знака одного из векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ (ср. § 137). Из этих условий получаем следующие соотношения:

$$a(\pi-\theta)=a(\theta),\quad b(\pi-\theta)=-b(\theta),\quad c(\pi-\theta)=-c(\theta),$$
$$d(\pi-\theta)=d(\theta),\quad e(\pi-\theta)=e(\theta). \qquad (2)$$

В силу изотопической инвариантности амплитуда рассеяния одинакова для рассеяний nn и pp и для рассеяния np в изотопическом состоянии с $T=1$. Для системы np возможно, однако, также и состояние с $T=0$; в результате амплитуда рассеяния np характеризуется другими коэффициентами a, b, ... в (1), не обладающими свойствами симметрии (2).

§ 141. Полюсы Редже

В § 128 были рассмотрены аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции комплексной переменной E — энергии частиц; орбитальный момент l играл при этом роль параметра,