В случае взаимного рассеяния нуклонов (протонов и нейтронов) последний член (140,12) отсутствует. Это следует уже хотя бы из того, что действующие между нуклонами ядерные силы сохраняют абсолютную величину полного спина системы S; оператор же $\hat{\mathbf{s}}_1-\hat{\mathbf{s}}_2$ не коммутирует с оператором $\hat{\mathbf{S}}^2$ (остальные члены в (140,12) выражаются, согласно (117,4), через оператор полного спина $\hat{\mathbf{S}}$ и потому коммутируют с $\hat{\mathbf{S}}^2$). При рассеянии одинаковых нуклонов (pp или nn) коэффициенты A, B, ... как функции угла рассеяния удовлетворяют также определенным соотношениям симметрии, являющимся следствием тождественности обеих частиц (см. задачу 2).

Задачи

1. Для рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 0 определить поляризацию после рассеяния, если до рассеяния она тоже была отлична от нуля.

Решение. Вычисление по формуле (140,9) удобно производить в компонентах, выбрав ось z вдоль направления $\mathbf{v}$. В результате получим

$$\mathbf{P}' = \frac{(|A|^2-|B|^2)\,\mathbf{P}+2|B|^2\,\mathbf{v}(\mathbf{vP})+2\,\mathrm{Im}\,(AB^*)\,[\mathbf{vP}]+2\mathbf{v}\,\mathrm{Re}\,(AB^*)}{|A|^2+|B|^2+2\,\mathrm{Re}\,(AB^*)\,\mathbf{vP}}.$$

2. Найти условия симметрии, которым удовлетворяют как функции угла θ коэффициенты в амплитуде рассеяния двух одинаковых нуклонов (*R. Oehme*, 1955).

Решение. Перегруппируем члены в (140,12) таким образом, чтобы каждый из них был отличен от нуля лишь для синглетных ($S=0$) или триплетных ($S=1$) состояний системы нуклонов:

$$\hat{f} = a\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2-\frac{1}{4}\right)+b\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2+\frac{3}{4}\right)+c\left[\frac{1}{4}+(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{v})(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{v})\right]+$$
$$+d\,[(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}')+(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n}')(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n})]+e\,(\hat{\mathbf{s}}_1+\hat{\mathbf{s}}_2,\ \mathbf{v}). \qquad (1)$$

С помощью формул (117,4) легко убедиться, что первый член отличен от нуля лишь при $S=0$, а остальные — при $S=1$. В силу тождественности частиц амплитуда рассеяния должна быть симметрична относительно перестановки координат частиц при $S=0$ и антисимметрична при $S=1$; это преобразование означает замену $\theta\to\pi-\theta$ или, что то же, изменение знака одного из векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ (ср. § 137). Из этих условий получаем следующие соотношения:

$$a(\pi-\theta)=a(\theta),\quad b(\pi-\theta)=-b(\theta),\quad c(\pi-\theta)=-c(\theta),$$
$$d(\pi-\theta)=d(\theta),\quad e(\pi-\theta)=e(\theta). \qquad (2)$$

В силу изотопической инвариантности амплитуда рассеяния одинакова для рассеяний nn и pp и для рассеяния np в изотопическом состоянии с $T=1$. Для системы np возможно, однако, также и состояние с $T=0$; в результате амплитуда рассеяния np характеризуется другими коэффициентами a, b, ... в (1), не обладающими свойствами симметрии (2).

§ 141. Полюсы Редже

В § 128 были рассмотрены аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции комплексной переменной E — энергии частиц; орбитальный момент l играл при этом роль параметра, пробегающего вещественные целые значения. Дальнейшие существенные с методической точки зрения свойства амплитуды рассеяния выясняются, если рассматривать теперь l как непрерывную комплексную переменную, при вещественных значениях энергии E [1]).

Как и в § 128, рассмотрим радиальные волновые функции с асимптотическим (при $r \to \infty$) видом

$$\chi_l = rR_l = A(l, E) \exp\left(-\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right) + B(l, E) \exp\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right). \quad (141,1)$$

Эти функции являются решениями уравнения Шредингера (32,8) (в котором l рассматривается теперь как комплексный параметр), причем отбор одного из двух независимых решений производится условием

$$R_l \approx \mathrm{const}\cdot r^l \text{ при } r \to 0. \quad (141,2)$$

Сразу же отметим, что такое условие накладывает определенное ограничение на допустимые значения параметра l. Действительно, общий вид решения уравнения (32,8) при малых r есть

$$R_l \approx c_1 r^l + c_2 r^{-l-1}$$

(см. конец § 32). Для того чтобы второе решение могло быть однозначным образом выделено «на фоне» первого и исключено, член с r^{-l-1} должен быть при $r \to 0$ больше члена с r^l. При комплексных значениях l отсюда возникает условие $\mathrm{Re}\, l > \mathrm{Re}\,(-l-1)$, т. е.

$$\mathrm{Re}\left(l + \frac{1}{2}\right) > 0. \quad (141,3)$$

Везде ниже рассматривается именно эта полуплоскость комплексного l — справа от вертикальной прямой $l = -1/2$.

Будучи решением дифференциального уравнения с аналитическими по параметру l коэффициентами, волновая функция $R(r; l, E)$ является аналитической функцией этого параметра, не имеющей особенностей в полуплоскости (141,3). Это относится, в частности, и к асимптотическому выражению (141,1), а потому функции $A(l, E)$ и $B(l, E)$ не имеют особенностей по l. При этом, однако, подразумевается, что сохранение (при $r \to \infty$) обоих членов в (141,1) действительно законно. При $E > 0$ это всегда так, а при $E < 0$ — справедливо, если поле $U(r)$ удовлетворяет условиям (128,6) или (128,13). В этих рассуждениях существенно, что характер асимптотического (по r) поведения волновой функ-

[1]) Эти свойства впервые изучались *Редже* (*T. Regge*, 1958).

ции зависит только от E, но не от l; поэтому комплексность l не меняет условий перехода к асимптотике.

Сравнив (141,1) с асимптотической формулой (128,15), найдем элемент S-матрицы в виде

$$S(l, E) = \exp[2i\delta(l, E)] = e^{i\pi l}\frac{A(l, E)}{B(l, E)}, \qquad (141,4)$$

справедливом и при комплексных значениях l (при этом, однако, «фазовый сдвиг» δ уже не веществен).

При вещественных значениях l и при $E > 0$ функции A и B связаны соотношением (128,4): $A(l, E) = B^*(l, E)$. Отсюда следует, что при комплексных l

$$A(l^*, E) = B^*(l, E) \text{ при } E > 0, \qquad (141,5)$$

а потому $S(l, E)$ удовлетворяет условию *комплексной унитарности*

$$S^*(l, E)\, S(l^*, E) = 1. \qquad (141,6)$$

В силу отсутствия особенностей у $A(l, E)$ и $B(l, E)$ как функций от l функция $S(l, E)$ (а с нею и парциальная амплитуда рассеяния $f(l, E)$) имеет особенности (полюсы) лишь в нулях функции $B(l, E)$. Полюсы амплитуды рассеяния в плоскости комплексного l называют *полюсами Редже*. Их положение зависит, конечно, от значения вещественного параметра E. Функции

$$l = \alpha_i(E),$$

определяющие положения полюсов, называют *траекториями Редже*; при изменении E полюсы перемещаются в плоскости l по определенным линиям (индекс i, нумерующий полюсы, мы будем ниже опускать).

Приступая к изучению свойств траекторий Редже, покажем прежде всего, что при $E < 0$ все $\alpha(E)$ — вещественные функции. Для этого рассмотрим уравнение

$$\chi'' + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r)) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2}\right]\chi = 0, \qquad (141,7)$$

которому удовлетворяет волновая функция с $l = \alpha$. Умножив это уравнение на χ^* и проинтегрировав его по dr (причем первый член преобразуется интегрированием по частям), получим

$$-\int_0^\infty |\chi'|^2\, dr + \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty (E - U)\,|\chi|^2\, dr - \alpha(\alpha+1)\int_0^\infty \frac{|\chi|^2}{r^2}\, dr = 0.$$

Здесь учтено, что при $B = 0$ (условие, определяющее полюсы Редже) волновая функция экспоненциально затухает при $r \to \infty$, так что все интегралы сходятся. Первые два члена в полученном равенстве вещественны, а в последнем члене веществен интеграл. Поэтому должно быть

$$\operatorname{Im} \alpha (\alpha + 1) = \operatorname{Im} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \operatorname{Re} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Im} \alpha = 0.$$

Но поскольку мы рассматриваем лишь полюсы, находящиеся на полуплоскости (141,3), то заведомо $\operatorname{Re} (\alpha + 1/2) > 0$, и мы приходим к требуемому результату

$$\operatorname{Im} \alpha (E) = 0 \text{ при } E < 0. \qquad (141,8)$$

Далее, произведем с уравнением (141,7) следующие операции (аналогичные выводу равенства (128,10)): дифференцируем его по E, умножаем полученное уравнение на χ, а исходное уравнение (141,7) — на $\partial\chi/\partial E$; вычтя затем одно из другого, получим тождество

$$\left[\chi' \frac{\partial \chi}{\partial E} - \chi \left(\frac{\partial \chi}{\partial E}\right)'\right]' - \frac{2m}{\hbar^2} \chi^2 + \frac{\chi^2}{r^2} \frac{d\alpha (\alpha + 1)}{dE} = 0.$$

Проинтегрируем его по dr от 0 до ∞, снова учтя при этом обращение χ в нуль при $r \to \infty$. Интеграл от первого члена обращается в нуль, и мы находим

$$\frac{d\alpha (\alpha + 1)}{dE} \int_0^\infty \frac{\chi^2}{r^2} dr = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \chi^2 \, dr. \qquad (141,9)$$

Ввиду известной уже нам вещественности α, вещественна также и волновая функция, а потому оба интеграла в (141,9) заведомо положительны. Следовательно,

$$\frac{d}{dE} \alpha (\alpha + 1) = 2 \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{d\alpha}{dE} > 0,$$

и ввиду положительности $\alpha + 1/2$

$$\frac{d\alpha}{dE} > 0 \text{ при } E < 0.$$

Таким образом, при $E < 0$ функции $\alpha (E)$ монотонно возрастают с увеличением E.

Отрицательные значения E, при которых функции $\alpha (E)$ принимают «физические» значения (т. е. равны целым числам $l = 0, 1, 2, \ldots$), отвечают дискретным уровням энергии системы. Отметим, что таким образом возникает новый классификационный принцип для связанных состояний: по траекториям Редже, на которых они лежат.

В качестве примера рассмотрим траектории Редже для движения в кулоновом поле притяжения. Элементы матрицы рассеяния даются в этом случае выражением [1])

$$S_l = \frac{\Gamma(l+1-i/k)}{\Gamma(l+1+i/k)} \qquad (141,10)$$

(k — в кулоновых единицах). Его полюсы лежат в точках, где аргумент функции $\Gamma(l+1-i/k)$ равен целому отрицательному числу или нулю. При $E<0$ имеем $k = i\sqrt{-2E}$, так что

$$\alpha(E) = -n_r - 1 + \frac{1}{\sqrt{-2E}}, \quad E<0, \qquad (141,11)$$

где $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ — число, нумерующее траектории Редже. Приравняв $\alpha(E)$ целому числу $l = 0, 1, 2, \ldots$, получим известную формулу Бора для дискретных уровней энергии в кулоновом поле

$$E = -\frac{1}{2(n_r+1+l)^2}.$$

Число n_r оказывается при этом совпадающим с радиальным квантовым числом, определяющим число узлов радиальной волновой функции. Каждой траектории Редже (т. е. каждому заданному значению n_r) отвечает бесконечное множество уровней, отличающихся значением орбитального момента.

Обратимся к свойствам функций $\alpha(E)$ при $E>0$. Напомним (см. § 128), что функции $A(l, E)$ и $B(l, E)$ в (141,1) как функции комплексной переменной E определены на плоскости с разрезом на правой вещественной полуоси. Соответственно такой же разрез имеют и функции $l = \alpha(E)$ — корни уравнения $B(l, E) = 0$. На верхнем и нижнем краях разреза $\alpha(E)$ имеют комплексно сопряженные значения; при этом на верхнем краю $\operatorname{Im}\alpha > 0$. Не останавливаясь на формальном доказательстве этого утверждения, приведем более физичные соображения, поясняющие его происхождение.

При комплексном l становится комплексной также и центробежная энергия, а с нею и эффективная потенциальная энергия $U_l = U + l(l+1)/2mr^2$. Повторив изложенный в § 19 вывод, получим теперь вместо (19,6)

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 + \operatorname{div}\mathbf{j} = 2|\Psi|^2 \operatorname{Im} U_l.$$

При $l = \alpha$, $\operatorname{Im}\alpha > 0$ имеем также и $\operatorname{Im} U_l > 0$; тогда выражение в правой стороне равенства положительно, что означает как бы испускание новых частиц в объеме поля. Соответственно асимптотическое выражение волновой функции (содержащее при $B = 0$

[1]) Ср. формулу (135,11), в которой (для перехода от случая отталкивания к случаю притяжения) надо изменить знаки перед k.

лишь первый из двух членов в (141,1)) должно представлять собой расходящуюся волну; именно это имеет место на верхнем краю разреза — ср. переход от (128,1) к (128,3).

Поскольку при $E > 0$ функции $\alpha(E)$ комплексны, они не могут принимать здесь своих «физических» значений $l = 0, 1, 2, \ldots$ Они могут, однако, оказаться близкими (в плоскости комплексного l) к таким значениям. Покажем, что в таком случае в парциальной амплитуде рассеяния (соответствующей данному целому значению l) возникает резонанс.

Пусть l_0 — целое значение, к которому близка функция $\alpha(E)$. Пусть, далее, E_0 — такое (вещественное положительное) значение энергии, для которого $\operatorname{Re}\alpha(E_0) = l_0$. Тогда вблизи этого значения имеем

$$\alpha(E) \approx l_0 + i\eta + \beta(E - E_0), \tag{141,12}$$

где $\eta = \operatorname{Im}\alpha(E_0)$ — вещественная постоянная. Будем рассматривать значения $\alpha(E)$ на верхнем краю разреза; согласно сказанному выше тогда $\eta > 0$ (причем, по предположению о близости α к l_0, $\eta \ll 1$). Легко видеть, что и постоянную β (т. е. производную $d\alpha/dE$ при $E = E_0$) можно считать вещественной положительной величиной. Действительно, поскольку $\alpha(E)$ почти вещественна, то почти вещественна и волновая функция $\chi(r; \alpha, E)$. Пренебрегая величинами высших порядков малости по η, можно пренебречь мнимой частью χ, тогда положительность β следует из положительности интегралов в соотношении (141,9)[1]).

Поскольку значение $l = \alpha(E)$ является нулем функции $B(l, E)$, то вблизи точки α, E_0 эта функция пропорциональна $\alpha - l$. С учетом (141,12) имеем поэтому

$$B(l_0, E) \approx \text{const}\,[a(E - E_0) + i\eta]. \tag{141,13}$$

Но это выражение по форме как раз совпадает с (134,6), причем E_0 оказывается энергией, а $\Gamma = 2\eta/a > 0$ — шириной квазидискретного уровня. Таким образом, близость траектории Редже

[1]) Для уяснения структуры этих интегралов отметим, что асимптотическая область $r \gg a$ (a — радиус действия поля), где справедливо выражение (141,1) для волновой функции, вносит лишь малый вклад в интегралы, если η мало. Действительно, если $l = \alpha(E)$ — нуль функции $B(l, E)$, то (в силу (141,5)) $l = \alpha^*$ — нуль функции $A(l, E)$. Поэтому $A(\alpha, E)$ (а тем самым и $\chi(r; \alpha, E)$ в области $r \gg a$) оказываются малыми величинами $\sim\eta^{1/2}$ (см. (134,11)). При оценке интегралов существенно также, что на верхнем краю разреза (по E) волновая функция содержит множитель e^{ikr}: $\chi(r; \alpha, E) = A(\alpha, E)\,e^{ikr}$. На этом краю можно понимать E как $E + i\delta$ (где $\delta \to +0$); тогда и k получает малую положительную мнимую часть, чем обеспечивается сходимость интегралов в (141,9). Физически малость вклада в интегралы от области $r \gg a$ связана с тем, что энергия E_0 отвечает квазистационарному состоянию (см. ниже); поэтому частица попадает в эту область лишь в результате маловероятного распада состояния. Основной же вклад в интегралы возникает от области $r \sim a$, в которой волновая функция почти вещественна.

(при $E > 0$) к целым значениям l отвечает квазистационарным состояниям системы. Тем самым для этих состояний возникает тот же классификационный принцип, что и для строго стационарных состояний: каждой траектории Редже может отвечать целое семейство дискретных и квазидискретных уровней.

Рассмотрение l как комплексной переменной позволяет получить полезное интегральное представление для полной амплитуды рассеяния (при $E > 0$), даваемой рядом (123,11)

$$f(\mu) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,[S(l, E) - 1]\, P_l(\mu), \quad \mu = \cos\theta. \qquad (141{,}14)$$

Для этого надо прежде всего определить функции $P_l(\mu)$ не только при целых $l \geqslant 0$, но и при комплексных значениях l. Это можно сделать, понимая под $P_l(\mu)$ решение уравнения (c,2)

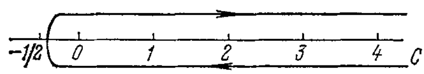
$$(1-\mu^2)\, P_l''(\mu) - 2\mu P_l'(\mu) + l\,(l+1)\, P_l(\mu) = 0 \qquad (141{,}15)$$

с граничным условием $P_l(1) = 1$. Определенная таким образом $P_l(\mu)$ как функция l не имеет особенностей при конечных значениях этой переменной [1]).

Легко видеть, что ряд (141,14) совпадает с интегралом

$$f(\mu) = \frac{1}{4k} \int\limits_C \frac{2l+1}{\sin \pi l}\,[S(l, E) - 1]\, P_l(-\mu)\, dl, \qquad (141{,}16)$$

взятым по пути C, обходящему в отрицательном направлении (по часовой стрелке) все точки $l = 0, 1, 2, \ldots$ на вещественной оси, и замыкающимся на бесконечности:



При этом все полюсы $l = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ функции $S(l, E)$ (расположенные при $E > 0$ не на вещественной оси) должны оставаться снаружи от контура C.

Действительно, интеграл (141,16) сводится к (умноженной на $-2\pi i$) сумме вычетов подынтегрального выражения в точках $l = 0, 1, 2, \ldots$ — полюсах функции $1/\sin \pi l$, причем вычеты самой этой функции равны $(-1)^l/\pi$. Заметив также, что при целых l: $P_l(-\mu) = (-1)^l P_l(\mu)$, сведем (141,16) к (141,14) [2]).

[1]) Путем сравнения (141,15) с уравнением (e,2), можно выразить $P_l(\mu)$ через гипергеометрическую функцию

$$P_l(\mu) = F\left(-l,\ l+1;\ 1;\ \frac{1-\mu}{2}\right).$$

[2]) Более подробное изложение рассмотренного в этом параграфе круга вопросов (в рамках нерелятивистской теории) можно найти в указанной на стр. 588 книге *де Альфаро* и *Редже*.

Задача

Показать, что фазовые сдвиги, соответствующие последовательным целым значениям l, удовлетворяют неравенству

$$\delta_{l+1}(E) - \delta_l(E) < \pi/2.$$

Решение. Будем рассматривать l как непрерывную вещественную переменную и продифференцируем по l уравнение (32,10):

$$\frac{\partial \chi''}{\partial l} + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E-U) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\partial \chi}{\partial l} = (2l+1)\frac{\chi}{r^2}.$$

Умножая это уравнение на χ, а исходное — на $\partial\chi/\partial l$ и вычитая одно из другого находим:

$$\left[\chi\frac{\partial \chi'}{\partial l} - \chi'\frac{\partial \chi}{\partial l}\right]' = (2l+1)\frac{\chi^2}{r^2}.$$

Проинтегрируем это равенство по r от 0 до ∞. При $r = 0$ выражение в квадратных скобках равно нулю, а при $r \to \infty$ можно использовать для χ асимптотическое выражение (33,20). В результате получаем

$$4k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\partial \delta_l}{\partial l}\right) = (2l+1)\int_0^\infty \frac{\chi^2}{r^2}\,dr > 0,$$

так что $\partial\delta_l/\partial l < \pi/2$. Интегрируя это соотношение по l от l до $l+1$, получаем искомое неравенство. Комбинируя его с формулой (133,17), можно доказать, что число дискретных уровней n_l не возрастает с ростом l. Действительно, при $E \to \infty$, когда справедливо борновское приближение, фазы рассеяния стремятся к нулю, так что $\delta_l(\infty) = 0$. Тогда

$$n_{l+1} - n_l = \frac{1}{\pi}[\delta_{l+1}(0) - \delta_l(0)] < 1/2, \qquad n_{l+1} - n_l \leqslant 0.$$