ГЛАВА XVIII

НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

§ 142. Упругое рассеяние при наличии неупругих процессов

Неупругими называют столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния сталкивающихся частиц. Эти изменения мы понимаем здесь в самом широком смысле, в частности, может меняться и самый род частиц. Так, речь может идти о возбуждении или ионизации атомов, возбуждении или распаде ядер и т. п. В случаях, когда столкновение (например, ядерная реакция) может сопровождаться различными физическими процессами, говорят о различных *каналах* реакции.

Наличие неупругих каналов оказывает определенное влияние также и на свойства упругого рассеяния.

В общем случае наличия различных каналов реакции асимптотическое выражение волновой функции системы сталкивающихся частиц представляет собой сумму, в которой каждому возможному каналу соответствует по одному члену. Среди них имеется, в частности, и член, описывающий частицы в начальном неизмененном состоянии (как говорят, во *входном канале*). Он представляет собой произведение волновых функций внутреннего состояния частиц и функции, описывающей их относительное движение (в системе координат, в которой покоится их центр инерции). Именно эта последняя функция и интересует нас здесь; обозначим ее посредством ψ и выясним ее асимптотический вид.

Волновая функция ψ во входном канале складывается из падающей плоской волны и расходящейся сферической волны, отвечающей упругому рассеянию. Ее можно представить также и в виде суммы сходящейся и расходящейся волн, как это было сделано в § 123. Разница заключается в том, что асимптотическое выражение для радиальных функций $R_l(r)$ не может быть взято в виде стоячей волны. Стоячая волна есть сумма сходящейся и расходящейся волн с одинаковыми амплитудами. При чисто упругом рассеянии это соответствует физическому смыслу задачи, но при наличии неупругих каналов амплитуда расходящейся волны должна быть меньше амплитуды сходящейся волны. Поэтому асимптотическое выражение ψ будет даваться формулой (123,9)

$$\psi = \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \left[(-1)^{l+1} e^{-ikr} + S_l e^{ikr}\right] \qquad (142,1)$$

с той разницей, что S_l не определяются теперь выражением (123,10), а являются некоторыми (вообще говоря, комплексными) величинами с модулями, меньшими единицы. Амплитуда упругого рассеяния выражается через эти величины формулой (123,11)

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta). \tag{142,2}$$

Для полного сечения σ_e упругого рассеяния получим вместо (123,12) формулу

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-S_l|^2. \tag{142,3}$$

Полное сечение неупругого рассеяния, или, как говорят также, *сечение реакций* σ_r по всем возможным каналам, тоже можно выразить через величины S_l. Для этого достаточно заметить, что для каждого значения l интенсивность расходящейся волны ослаблена по сравнению с интенсивностью сходящейся волны в отношении $|S_l|^2$. Это ослабление должно быть целиком отнесено за счет неупругого рассеяния. Поэтому ясно, что

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-|S_l|^2), \tag{142,4}$$

а полное сечение

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-\operatorname{Re} S_l). \tag{142,5}$$

Парциальная амплитуда упругого рассеяния с моментом l, определенная согласно (123,15), есть

$$f_l = \frac{S_l-1}{2ik}, \tag{142,6}$$

а каждый из членов суммы в (142,3) и (142,4) есть парциальное сечение упругого и неупругого рассеяния частиц с моментом l:

$$\begin{gathered}\sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\,|1-S_l|^2,\\ \sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)(1-|S_l|^2),\\ \sigma_t^{(l)} = \frac{2\pi}{k^2}(2l+1)(1-\operatorname{Re} S_l).\end{gathered} \tag{142,7}$$

Значение $S_l = 1$ соответствует полному отсутствию рассеяния (с данным l). Случай же $S_l = 0$ отвечает полному «поглощению» частиц с моментом l (в (142,1) отсутствует парциальная расходящаяся волна с этим значением l); при этом сечения упругого и неупругого рассеяний одинаковы:

$$\sigma_e^{(l)} = \sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1). \tag{142,8}$$

Отметим также, что хотя упругое рассеяние может существовать и без неупругого (при $|S_l| = 1$), но обратное невозможно: наличие неупругого рассеяния непременно приводит к одновременному наличию упругого рассеяния. При заданном значении $\sigma_r^{(l)}$ парциальное сечение упругого рассеяния должно находиться в интервале

$$\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{\sigma_0 - \sigma_r^{(l)}} \leqslant \sqrt{\sigma_e^{(l)}} \leqslant \sqrt{\sigma_0} + \sqrt{\sigma_0 - \sigma_r^{(l)}}, \tag{142,9}$$

где $\sigma_0 = (2l+1)\,\pi/k^2$.

Взяв значение $f(\theta)$ из (142,2) при $\theta = 0$ и сравнив с выражением (142,5), получим соотношение

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_t, \tag{142,10}$$

обобщающее ранее полученную оптическую теорему (125,9). Здесь $f(0)$ есть по-прежнему амплитуда упругого рассеяния на нулевой угол, но полное сечение σ_t включает в себя также и неупругую часть.

Мнимые же части парциальных амплитуд f_l связаны с парциальным сечением $\sigma_t^{(l)}$ соотношением

$$\operatorname{Im} f_l = \frac{k}{4\pi}\,\frac{\sigma_t^{(l)}}{2l+1}, \tag{142,11}$$

непосредственно следующим из (142,6) и (142,7).

Тот факт, что коэффициенты S_l в асимптотическом выражении волновой функции по модулю не равны единице, никак не отражается на сделанных в § 128 заключениях об особых точках амплитуды упругого рассеяния как функции комплексного E; эти выводы сохраняют свою силу и при наличии неупругих процессов. Аналитические свойства амплитуды меняются, однако, в том отношении, что она теперь невещественна на левой вещественной полуоси ($E < 0$), а ее значения на верхнем и нижнем краях разреза при $E > 0$ не являются комплексно сопряженными величинами (соответственно не являются комплексно сопряженными и вообще все ее значения в симметричных относительно вещественной оси точках верхней и нижней полуплоскостей).

При переходе с верхнего края разреза на нижний путем полного обхода вокруг точки $E = 0$ корень $\sqrt{E}$ меняет знак, т. е. в результате обхода меняет знак вещественная (при $E > 0$) величина k. При этом сходящаяся и расходящаяся волны в (142,1) меняются ролями, соответственно чему роль нового коэффициента S_l будет играть величина $1/S_l$, обратная прежнему его значению (что отнюдь не совпадает с S_l^*). Значения амплитуд f_l на верхнем и нижнем краях разреза естественно обозначить как $f_l(k)$ и $f_l(-k)$ (физической амплитудой является, разумеется, лишь $f_l(k)$!). Согласно (142,6) имеем

$$f_l(k) = \frac{S_l - 1}{2ik}, \quad f_l(-k) = -\frac{1/S_l - 1}{2ik}.$$

Исключив S_l из этих двух равенств, получим соотношение:

$$f_l(k) - f_l(-k) = 2ikf_l(k) f_l(-k) \tag{142,12}$$

(в отсутствие неупругих процессов было бы $f(-k) = f^*(k)$ и соотношения (142,12) и (142,11) совпадали бы друг с другом).

Переписав (142,12) в виде

$$\frac{1}{f_l(k)} - \frac{1}{f_l(-k)} = -2ik,$$

мы видим, что сумма $1/f_l(k) + ik$ должна быть четной функцией k. Обозначив эту функцию через $g_l(k^2)$, имеем

$$f_l(k) = \frac{1}{g_l(k^2) - ik}. \tag{142,13}$$

Четная функция $g_l(k^2)$, однако, не является теперь вещественной, как это было в (125,15) [1]).

Когда пучок частиц проходит через рассеивающую среду, состоящую из большого числа рассеивающих центров, он постепенно ослабевает в связи с выбыванием из него частиц, испытывающих различные процессы столкновений. Это ослабление полностью определяется амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол и, при соблюдении определенных условий (см. ниже), может быть описано следующим формальным методом [2]).

Пусть $f(0, E)$ — амплитуда рассеяния на угол нуль на каждой отдельной частице среды. Будем предполагать, что f мало по сравнению со средним расстоянием $d \sim (V/N)^{1/3}$ между частицами; тогда можно рассматривать рассеяние на каждой из них в отдельности. Введем в качестве вспомогательной величины некоторое эффективное поле U_{eff} неподвижного центра, определив его таким образом, чтобы вычисленная с его помощью борновская амплитуда рассеяния на угол нуль была бы как раз равна истин-

---

[1]) Изложенные рассуждения, а с ними и вывод о четности функции g_l предполагают достаточно быстрое убывание взаимодействия при $r \to \infty$, которое обеспечивало бы отсутствие разрезов в левой полуплоскости E и тем самым дало бы возможность произвести полный обход вокруг точки $E = 0$.

[2]) Излагаемые ниже представления применяются, в частности, для описания рассеяния на ядрах быстрых (с энергией порядка сотен МэВ) нейтронов, длина волны которых настолько мала, что по отношению к ним ядро может рассматриваться как неоднородная макроскопическая среда.

ной амплитуде $f(0, E)$ (этим отнюдь не подразумевается, что борновское приближение применимо для вычисления $f(0, E)$ по истинному взаимодействию частиц!). Таким образом, по определению, имеем (см. (126,4))

$$\int U_{\text{eff}}\, dV = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} f(0, E), \qquad (142,14)$$

где m — масса рассеиваемой частицы. Вместе с амплитудой f определенное таким образом поле комплексно. Связь между его радиусом действия a и величиной U_{eff} получается из оценки обеих сторон равенства (142,14)

$$a^3 U_{\text{eff}} \sim \hbar^2 f/m. \qquad (142,15)$$

Определение (142,14), конечно, неоднозначно. Наложим на него еще дополнительное условие, чтобы поле U_{eff} удовлетворяло условию применимости теории возмущений:

$$|U_{\text{eff}}| \ll \hbar^2/ma^2 \qquad (142,16)$$

(при этом $|f| \ll a$). Легко видеть, что в таком случае ослабление рассеиваемого пучка может быть описано как распространение плоской волны по однородной среде, в которой частица обладает постоянной потенциальной энергией, равной

$$\overline{U_{\text{eff}}} = \frac{N}{V}\int U_{\text{eff}}\, dV = -\frac{N}{V}\frac{2\pi\hbar^2}{m} f(0, E), \qquad (142,17)$$

т. е. получающейся усреднением эффективных полей всех N частиц среды по ее объему V. Это становится очевидным, если рассмотреть сначала рассеяние на отдельном участке среды, в котором хотя и находится уже много рассеивающих центров, но эффект рассеяния еще мал (возможность выделения таких участков обеспечивается условием (142,16)). Ослабление пучка при прохождении через такой участок определяется амплитудой рассеяния на нулевой угол, которая в свою очередь в борновском приближении определяется интегралом от рассеивающего поля по всему объему рассеивающего участка. Это и значит, что интересующие нас рассеивательные свойства среды полностью определяются усредненным по ее объему полем (142,17).

Таким образом, проходящий через среду пучок частиц можно описывать плоской волной $\sim e^{ikz}$ с волновым вектором

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(E - \overline{U_{\text{eff}}}\right)}.$$

Введя волновой вектор $k_0 = \sqrt{2mE}/\hbar$ падающих частиц, напишем k в виде nk_0; величина

$$n = \sqrt{1 - \frac{\overline{U_{\text{eff}}}}{E}} = \sqrt{1 + \frac{N}{V}\frac{2\pi\hbar^2}{mE} f(0, E)} \qquad (142,18)$$

играет роль *коэффициента преломления* среды по отношению к проходящему через нее пучку частиц. Он, вообще говоря, комплексен (амплитуда комплексна!), и его мнимая часть определяет ослабление интенсивности пучка. Если $E \gg |\overline{U_{eff}}|$, то (142,18) дает, как и следовало,

$$\operatorname{Im} n = \frac{N}{V} \frac{\pi \hbar^2}{mE} \operatorname{Im} f(0, E) = \frac{N}{V} \frac{\sigma_t}{2k},$$

где σ_t — полное сечение рассеяния (мы воспользовались здесь оптической теоремой (142,10)); это выражение соответствует очевидному результату: интенсивность волны затухает по закону

$$|e^{ikz}|^2 \sim \exp\left(-\frac{N}{V}\sigma_t z\right).$$

Наряду с поглощением комплексный показатель преломления (142,18) определяет также (своей вещественной частью) закон преломления пучка при входе и выходе из рассеивающей среды [1]).

Задача

Нейтроны рассеиваются тяжелым ядром, причем длина волны нейтронов мала по сравнению с радиусом a ядра ($ka \gg 1$). Предполагается, что все нейтроны, падающие с орбитальным моментом $l < ka \equiv l_0$ (т. е. с прицельным расстоянием $\rho = \hbar l/mv = l/k < a$), поглощаются ядром, а при $l > l_0$ не взаимодействуют с ним вовсе. Определить сечение упругого рассеяния на малые углы.

Решение. В указанных условиях движение нейтронов происходит в основном квазиклассическим образом, а упругое рассеяние представляет собой результат слабого отклонения, вполне аналогичного фраунгоферовской дифракции света на черном шарике. Поэтому искомое сечение может быть написано непосредственно по известному решению дифракционной задачи [2]):

$$d\sigma_e = \pi a^2 \frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi\theta^2} do.$$

---

[1]) Интересный пример применения формулы (142,17) представляет смещение высших уровней атома щелочного металла, погруженного в посторонний газ. В высоковозбужденном состоянии валентный электрон находится на среднем расстоянии $\bar{r}$ от центра атома, большом по сравнению с размерами a как атомного остатка, так и посторонних нейтральных атомов. Эти последние атомы, находящиеся внутри сферы радиуса $\sim\bar{r}$, играют для валентного электрона роль центров рассеяния и приводят к сдвигу его уровня энергии на величину (142,17). При этом поскольку дебройлевская длина волны возбужденного валентного электрона тоже велика по сравнению с a, амплитуда $f(0, E) \approx -\alpha$, где α — длина рассеяния (ср. (132,9)). Таким образом, указанный эффект приводит к сдвигу уровней на постоянную величину $2\pi\hbar^2\alpha\nu/m$, где m — масса электрона, а ν — плотность числа частиц постороннего газа (*E. Fermi*, 1934).

[2]) См. II, § 61, задача 3 (задача о дифракции на черном шарике эквивалентна задаче о дифракции от круглого отверстия, прорезанного в непрозрачном экране). Сечение рассеяния получается делением интенсивности дифрагированных волн на плотность падающего потока.

Этот же результат можно получить и из (142,3). По условию задачи имеем $S_l = 0$ при $l < l_0$ и $S_l = 1$ при $l > l_0$. Поэтому амплитуда упругого рассеяния

$$f(\theta) = -\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{l_0}(2l+1)P_l(\cos\theta).$$

Основную роль в сумме играют члены с большими l. Соответственно этому, пишем $2l$ вместо $2l+1$, а для $P_l(\cos\theta)$ при малых θ пользуемся приближенным выражением (49,6) и переходим от суммирования к интегрированию:

$$f(\theta) = \frac{i}{k}\int_0^{l_0} lJ_0(\theta l)\,dl = \frac{i}{k\theta}l_0J_1(\theta l_0) = \frac{ia}{\theta}J_1(ka\theta),$$

что и требовалось [1]). Полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \pi a^2\int_0^\infty \frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi\theta^2}2\pi\theta\,d\theta = \pi a^2$$

(ввиду быстрой сходимости интегрирование может быть распространено до ∞); как и следовало в данных условиях (ср. (142,8)), оно совпадает по величине с сечением поглощения, равным просто площади геометрического сечения шарика. Полное сечение $\sigma_t = 2\pi a^2$.

§ 143. Неупругое рассеяние медленных частиц

Изложенный в § 132 вывод предельного закона упругого рассеяния при малых энергиях легко обобщается на случай наличия неупругих процессов.

Как и прежде, основную роль при малых энергиях играет рассеяние с $l = 0$. Напомним, что, согласно полученным в § 132 результатам, соответствующий элемент S-матрицы был равен

$$S_0 = e^{2i\delta_0} \approx 1 + 2i\delta_0 = 1 - 2ik\alpha.$$

Использованные в § 132 свойства волновой функции меняются только в том отношении, что налагаемое на нее условие на бесконечности (асимптотический вид (142,1)) теперь комплексно вместо вещественной стоячей волны в случае чисто упругого рассеяния. В связи с этим оказывается комплексной и постоянная $\alpha = -c_2/c_1$. При этом модуль $|S_0|$ уже не равен единице; условие $|S_0| < 1$ означает, что мнимая часть $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ должна быть отрицательна ($\alpha'' < 0$).

[1]) Аналогичным образом может быть рассмотрена задача о дифракционном рассеянии на «черном» ядре быстрых заряженных частиц. При этом граничное значение l_0 надо определять из условия, чтобы кратчайшее расстояние между ядром и частицей, движущейся по классической траектории в кулоновом поле, было как раз равно радиусу ядра. При $l < l_0$ надо по-прежнему положить $S_l = 0$, а при $l = l_0$ $S_l = e^{2i\delta_l}$, где δ_l — кулоновы фазы из (135,11). См. *А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук*, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950, § 22; J. of Physics USSR 9, 471 (1945).