Этот же результат можно получить и из (142,3). По условию задачи имеем $S_l = 0$ при $l < l_0$ и $S_l = 1$ при $l > l_0$. Поэтому амплитуда упругого рассеяния

$$f(\theta) = -\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{l_0}(2l+1)P_l(\cos\theta).$$

Основную роль в сумме играют члены с большими l. Соответственно этому, пишем $2l$ вместо $2l+1$, а для $P_l(\cos\theta)$ при малых θ пользуемся приближенным выражением (49,6) и переходим от суммирования к интегрированию:

$$f(\theta) = \frac{i}{k}\int_0^{l_0} lJ_0(\theta l)\,dl = \frac{i}{k\theta}l_0 J_1(\theta l_0) = \frac{ia}{\theta}J_1(ka\theta),$$

что и требовалось [1]). Полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \pi a^2\int_0^\infty \frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi\theta^2}2\pi\theta\,d\theta = \pi a^2$$

(ввиду быстрой сходимости интегрирование может быть распространено до ∞); как и следовало в данных условиях (ср. (142,8)), оно совпадает по величине с сечением поглощения, равным просто площади геометрического сечения шарика. Полное сечение $\sigma_t = 2\pi a^2$.

§ 143. Неупругое рассеяние медленных частиц

Изложенный в § 132 вывод предельного закона упругого рассеяния при малых энергиях легко обобщается на случай наличия неупругих процессов.

Как и прежде, основную роль при малых энергиях играет рассеяние с $l = 0$. Напомним, что, согласно полученным в § 132 результатам, соответствующий элемент S-матрицы был равен

$$S_0 = e^{2i\delta_0} \approx 1 + 2i\delta_0 = 1 - 2ik\alpha.$$

Использованные в § 132 свойства волновой функции меняются только в том отношении, что налагаемое на нее условие на бесконечности (асимптотический вид (142,1)) теперь комплексно вместо вещественной стоячей волны в случае чисто упругого рассеяния. В связи с этим оказывается комплексной и постоянная $\alpha = -c_2/c_1$. При этом модуль $|S_0|$ уже не равен единице; условие $|S_0| < 1$ означает, что мнимая часть $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ должна быть отрицательна ($\alpha'' < 0$).

[1]) Аналогичным образом может быть рассмотрена задача о дифракционном рассеянии на «черном» ядре быстрых заряженных частиц. При этом граничное значение l_0 надо определять из условия, чтобы кратчайшее расстояние между ядром и частицей, движущейся по классической траектории в кулоновом поле, было как раз равно радиусу ядра. При $l < l_0$ надо по-прежнему положить $S_l = 0$, а при $l = l_0$ $S_l = e^{2i\delta_l}$, где δ_l — кулоновы фазы из (135,11). См. *А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук*, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950, § 22; J. of Physics USSR 9, 471 (1945).

Подставив S_0 в (142,7), найдем сечения упругого и неупругого рассеяний

$$\sigma_e = 4\pi \mid \alpha \mid^2, \tag{143,1}$$

$$\sigma_r = \frac{4\pi}{k} \mid \alpha'' \mid. \tag{143,2}$$

Таким образом, сечение упругого рассеяния по-прежнему не зависит от скорости. Сечение же неупругих процессов оказывается обратно пропорциональным скорости частиц — так называемый *закон* $1/v$ (*H. A. Bethe*, 1935). Следовательно, при уменьшении скорости роль неупругих процессов по сравнению с упругим рассеянием возрастает [1]).

Предельные законы (143,1) и (143,2) являются, конечно, лишь первыми членами разложения сечений по степеням k. Интересно, что следующий член разложения в обоих этих сечениях не содержит никаких новых постоянных, помимо фигурирующих в (143,1), (143,2) величин (*Ф. Л. Шапиро*, 1958). Это обстоятельство является следствием четности функции $g_0(k^2)$ в выражении (142,13) $f_0(k) = 1/[g_0(k^2) - ik]$ парциальной амплитуды рассеяния ($l = 0$). При малых k эта функция разлагается, следовательно, по четным степеням k, так что следующим за $g_0 \approx -1/\alpha$ будет член $\sim k^2$. Пренебрегая этим членом, мы имеем право написать все же в $f_0(k)$ два члена разложения $f_0(k) \approx -\alpha(1 - ik\alpha)$. Соответственно можно сохранить следующие члены разложения и в сечениях, для которых легко получить следующие выражения:

$$\sigma_e = 4\pi \mid \alpha \mid^2 (1 - 2k \mid \alpha'' \mid), \tag{143,3}$$

$$\sigma_r = \frac{4\pi \mid \alpha'' \mid}{k} (1 - 2k \mid \alpha'' \mid). \tag{143,4}$$

Полученные результаты предполагают достаточно быстрое убывание взаимодействия на больших расстояниях. Мы видели в § 132, что амплитуда упругого рассеяния стремится при $k \to 0$ к постоянному пределу, если поле $U(r)$ убывает быстрее, чем r^{-3}. Это условие требуется и для справедливости аналогичного закона (143,1) при наличии неупругих каналов [2]).

Закон же $1/v$ для сечения реакции требует выполнения более слабого условия: поле должно убывать быстрее, чем r^{-2}, что ясно из следующего наглядного обоснования этого закона.

---

[1]) Аналогичным образом можно определить зависимость от скорости парциальных сечений реакции для отличных от нуля орбитальных моментов l. Они оказываются пропорциональными $\sigma_r^{(l)} \sim k^{2l-1}$. Сечения же упругого рассеяния $\sigma_e^{(l)}$ по-прежнему пропорциональны k^{4l}, т. е. убывают при $k \to 0$ быстрее, чем $\sigma_r^{(l)}$, с теми же l.

[2]) Формула же (143,3), учитывающая следующий член разложения по степеням k, требует убывания U более быстрого, чем r^{-4}.

Вероятность осуществления реакции при столкновении пропорциональна квадрату модуля волновой функции падающей частицы в «зоне реакции» (в области $r \sim a$). Физически это утверждение выражает собой тот факт, что, например, сталкивающийся с ядром медленный нейтрон может вызвать реакцию, лишь «проникнув» в ядро. Если взаимодействие убывает быстрее, чем r^{-2}, то на пути от больших r до $r \sim a$ оно не меняет порядка величины волновой функции; другими словами, отношение $|\psi(a)/\psi(\infty)|^2$ стремится при $k \to 0$ к конечному пределу (это видно из того, что в уравнении Шредингера член $U\psi$ оказывается малым по сравнению с $\Delta\psi$). Сечение реакции получится делением $|\psi|^2$ на плотность потока. Взяв ψ в виде плоской волны, нормированной на единичную плотность потока, имеем $|\psi|^2 \sim 1/v$, т. е. искомый результат.

При столкновении заряженных ядерных частиц, наряду с короткодействующими ядерными силами, имеется также медленно убывающее кулоново поле. Это поле может существенно изменить величину падающей волны в зоне реакции. Сечение реакции получится умножением $1/v$ на отношение квадратов модулей кулоновой и свободной волновых функций (при $r \to 0$); это отношение дается формулами (136,10), (136,11). Таким образом, получим (в кулоновых единицах)

$$\sigma_r = \frac{2\pi A}{k^2 \left| e^{\pm 2\pi/k} - 1 \right|}; \tag{143,5}$$

знак плюс в показателе соответствует отталкиванию, а знак минус — притяжению. Коэффициент A есть постоянная закона $1/v$; если скорость велика по сравнению с кулоновой единицей ($k \gg 1$), то кулоново взаимодействие не играет роли, и мы возвращаемся к закону $\sigma_r = A/k$.

Если же скорость мала по сравнению с кулоновой единицей ($k \ll 1$, т. е. в обычных единицах $Z_1Z_2e^2/\hbar v \gg 1$, где Z_1e, Z_2e — заряды сталкивающихся частиц), то кулоново взаимодействие играет доминирующую роль в определении величины волновой функции в зоне реакции. Для столкновения притягивающихся частиц имеем при этом

$$\sigma_r = \frac{2\pi A}{k^2}, \tag{143,6}$$

а для столкновения отталкивающихся частиц

$$\sigma_r = (2\pi A/k^2)\, e^{-2\pi/k}. \tag{143,7}$$

В последнем случае сечение стремится к нулю при $k \to 0$. Экспоненциальный множитель, отличающий (143,7) от (143,6), есть вероятность прохождения через кулоновский потенциальный барьер; в обычных единицах он имеет вид $\exp(-2\pi Z_1Z_2e^2/\hbar v)$.

Отметим, что предельный закон (143,6) относится не только к полному, но и к парциальным сечениям с каждым моментом l [1]). Это видно из того, что в разложении (136,1) функций $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ (фигурирующих в использованных нами формулах (136,10), (136,11)) во всех членах суммы функции R_{kl} имеют одинаковую предельную зависимость от k. Действительно, в пределе $k \to 0$ радиальные функции (в случае притяжения) даются выражениями (36,25) и вблизи центра имеем $R_{kl} \sim \sqrt{k}\, r^l$. Вклады отдельных моментов в квадрат волновой функции в зоне реакции $\sim a^{2l}/k$, т. е. одинаково зависят от k, хотя и ослабляются малым множителем $(a/a_c)^{2l}$ ($a_c = \hbar^2/mZ_1Z_2e^2$ — кулонова единица длины).

§ 144. Матрица рассеяния при наличии реакций

Рассматривавшееся в § 142, 143 сечение σ_r представляло собой суммарное сечение всех возможных неупругих каналов рассеяния. Покажем теперь, каким образом строится общая теория неупругих столкновений, в которой каждый канал может рассматриваться в отдельности.

Пусть в результате столкновения двух частиц возникает снова две (те же или другие) частицы. Перенумеруем все возможные (при заданной энергии) каналы реакции и будем отмечать относящиеся к ним величины соответствующими индексами.

Пусть канал i является входным. Волновая функция относительного движения сталкивающихся частиц (в системе центра инерции) в этом канале представляет собой уже неоднократно писавшуюся нами сумму падающей плоской волны и упруго рассеянной расходящейся волны:

$$\psi_i = \exp(ik_i z) + f_{ii}(\theta)\frac{\exp(ik_i r)}{r}. \qquad (144,1)$$

Квадрат амплитуды f_{ii} дает сечение упругого рассеяния в канале i:

$$d\sigma_{ii} = |f_{ii}|^2\, do. \qquad (144,2)$$

В других каналах (индекс f) волновые функции относительного движения частиц представляют собой расходящиеся волны. По причине, которая выяснится ниже, эти волны удобно представить в виде [2])

$$\psi_f = f_{fi}(\theta)\sqrt{\frac{m_f}{m_i}}\,\frac{\exp(ik_f r)}{r}, \qquad (144,3)$$

[1]) То же самое относится к закону (143,7).

[2]) Мы снова (ср. примечание на стр. 182) отмечаем начальное состояние системы индексом i, а конечное — индексом f. В амплитуде рассеяния индекс конечного состояния располагается слева от индекса начального состояния в соответствии с расположением индексов матричных элементов. В таком же порядке будут располагаться, для единообразия, индексы в обозначениях сечений.