Отметим, что предельный закон (143,6) относится не только к полному, но и к парциальным сечениям с каждым моментом l [1]). Это видно из того, что в разложении (136,1) функций $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ (фигурирующих в использованных нами формулах (136,10), (136,11)) во всех членах суммы функции R_{kl} имеют одинаковую предельную зависимость от k. Действительно, в пределе $k \to 0$ радиальные функции (в случае притяжения) даются выражениями (36,25) и вблизи центра имеем $R_{kl} \sim \sqrt{k}\, r^l$. Вклады отдельных моментов в квадрат волновой функции в зоне реакции $\sim a^{2l}/k$, т. е. одинаково зависят от k, хотя и ослабляются малым множителем $(a/a_c)^{2l}$ ($a_c = \hbar^2/mZ_1Z_2e^2$ — кулонова единица длины).

§ 144. Матрица рассеяния при наличии реакций

Рассматривавшееся в § 142, 143 сечение σ_r представляло собой суммарное сечение всех возможных неупругих каналов рассеяния. Покажем теперь, каким образом строится общая теория неупругих столкновений, в которой каждый канал может рассматриваться в отдельности.

Пусть в результате столкновения двух частиц возникает снова две (те же или другие) частицы. Перенумеруем все возможные (при заданной энергии) каналы реакции и будем отмечать относящиеся к ним величины соответствующими индексами.

Пусть канал i является входным. Волновая функция относительного движения сталкивающихся частиц (в системе центра инерции) в этом канале представляет собой уже неоднократно писавшуюся нами сумму падающей плоской волны и упруго рассеянной расходящейся волны:

$$\psi_i = \exp(ik_iz) + f_{ii}(\theta)\frac{\exp(ik_ir)}{r}. \qquad (144,1)$$

Квадрат амплитуды f_{ii} дает сечение упругого рассеяния в канале i

$$d\sigma_{ii} = |f_{ii}|^2\, do. \qquad (144,2)$$

В других каналах (индекс f) волновые функции относительного движения частиц представляют собой расходящиеся волны. По причине, которая выяснится ниже, эти волны удобно представить в виде [2])

$$\psi_f = f_{fi}(\theta)\sqrt{\frac{m_f}{m_i}}\,\frac{\exp(ik_fr)}{r}, \qquad (144,3)$$

[1]) То же самое относится к закону (143,7).

[2]) Мы снова (ср. примечание на стр. 182) отмечаем начальное состояние системы индексом i, а конечное — индексом f. В амплитуде рассеяния индекс конечного состояния располагается слева от индекса начального состояния в соответствии с расположением индексов матричных элементов. В таком же порядке будут располагаться, для единообразия, индексы в обозначениях сечений.

где $\mathbf{k}_f$ — волновой вектор относительного движения продуктов реакции (в канале f), θ — его угол с осью z, а m_i и m_f — приведенные массы двух начальных и двух конечных частиц. Рассеянный поток в телесном угле do получается умножением квадрата $|\psi_f|^2$ на $v_f r^2\, do$, а сечение соответствующей реакции — делением этого потока на плотность падающего потока, равную v_i:

$$d\sigma_{fi} = |f_{fi}|^2 \frac{p_f}{p_i} do_f, \qquad (144,4)$$

где импульсы $p_i = m_i v_i$, $p_f = m_f f_f$.

В § 125 был введен оператор рассеяния $\hat{S}$, переводящий сходящуюся волну в расходящуюся. При наличии нескольких каналов этот оператор имеет матричные элементы для переходов между различными каналами. «Диагональные» по каналам элементы соответствуют упругому рассеянию, а недиагональные — различным неупругим процессам; все эти элементы остаются еще операторами по другим переменным. Они определяются следующим образом.

Подобно тому как это было сделано в § 125, введем операторы $\hat{f}_{ii}$, $\hat{f}_{fi}$, связанные с амплитудами f_{ii}, f_{fi}, определив их формулой:

$$\hat{S}_{fi} = \delta_{fi} + 2i\sqrt{k_i k_f}\, \hat{f}_{fi}. \qquad (144,5)$$

Легко видеть, что именно при таком определении мы получим S-матрицу, которая должна будет удовлетворять условию унитарности. Действительно, напишем волновую функцию во входном канале в виде совокупности сходящейся и расходящейся волн, как она была представлена в § 125:

$$\psi_i = F(-\mathbf{n}') \frac{\exp(-ik_i r)}{r\sqrt{v_i}} - (1 + 2ik_i \hat{f}_{ii}) F(\mathbf{n}') \frac{\exp(ik_i r)}{r\sqrt{v_i}} =$$
$$= F(-\mathbf{n}') \frac{\exp(-ik_i r)}{r\sqrt{v_i}} - \hat{S}_{ii} F(\mathbf{n}') \frac{\exp(ik_i r)}{r\sqrt{v_i}} \qquad (144,6)$$

(здесь введен, для удобства, лишний множитель $v_i^{-1/2}$ по сравнению с выражением (125,3)). Тогда, при принятых нами обозначениях амплитуд, волновая функция в канале f напишется в виде

$$\psi_f = 2ik_i \sqrt{\frac{m_f}{m_i}}\, \hat{f}_{fi} F(\mathbf{n}') \frac{\exp(ik_f r)}{r\sqrt{v_i}} = \hat{S}_{fi} F(\mathbf{n}') \frac{\exp(ik_f r)}{r\sqrt{v_f}}. \qquad (144,7)$$

Поток в сходящихся волнах должен быть равен сумме потоков в расходящихся волнах во всех каналах; это требование выражает собой очевидное условие, что сумма вероятностей всех возможных (упругого и неупругих) процессов, которые могут возникнуть при столкновении, должна быть равна единице. Благодаря введенным в знаменатели сферических волн множителям $\sqrt{v}$ скорость выпадает из плотностей потоков в них. Поэтому поставленное условие означает просто требование совпадения нормировок сходящейся и совокупности расходящихся волн. Оно выражается, следовательно, по-прежнему условием унитарности оператора рассеяния, понимаемого как матрица, в частности, и по номерам различных каналов. Для операторов $\hat{f}_{fi}$ это условие выражается равенством

$$\hat{f}_{fi} - \hat{f}_{if}^{+} = 2i \sum_n k_n \hat{f}_{fn} \hat{f}_{in}^{+}, \tag{144,8}$$

аналогичным (125,7); индекс $+$ означает здесь комплексное сопряжение и транспонирование по всем остальным (помимо номера канала) матричным индексам.

S-матрица диагональна по отношению к состояниям с определенными значениями величины орбитального момента l; соответствующие матричные элементы будем отличать индексом (l). Воздействовав операторами $\hat{f}_{ii}$ и $\hat{f}_{fi}$ на функцию (125,17), получим амплитуды упругих и неупругих процессов в виде

$$\begin{aligned} f_{ii} &= \frac{1}{2ik_i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(S_{ii}^{(l)} - 1\right) P_l(\cos\theta), \\ f_{fi} &= \frac{1}{2i\sqrt{k_i k_f}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, S_{fi}^{(l)} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{144,9}$$

Соответствующие интегральные сечения

$$\sigma_{ii} = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left|1 - S_{ii}^{(l)}\right|^2, \quad \sigma_{fi} = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left|S_{fi}^{(l)}\right|^2. \tag{144,10}$$

Первая из этих формул совпадает с (142,3). Полное же сечение реакций σ_r (из входного канала i) есть сумма $\sigma_r = \sum_f{}' \sigma_{fi}$ по всем $f \neq i$. В силу унитарности S-матрицы имеем $\sum_f{}' |S_{fi}|^2 = 1 - |S_{ii}|^2$, и мы возвращаемся к формуле (142,4) для σ_r.

Симметрия процесса рассеяния по отношению к обращению времени (*теорема взаимности*) выражается равенством

$$\hat{S}_{fi} = \hat{S}_{i^* f^*}. \tag{144,11}$$

или, что то же:

$$\hat{f}_{fi} = \hat{f}_{i^* f^*}. \tag{144,12}$$

Здесь i^* и f^* обозначают состояния, отличающиеся от состояний i и f изменением знаков импульсов и проекций спинов частиц [1]; о них говорят как об *обращенных по времени* по отношению к состояниям i и f. Соотношения (144,11), (144,12) обобщают формулы (125,11), (125,12), относящиеся к упругому рассеянию [2].

Равенство (144,12) приводит к следующему соотношению для сечений реакции:

$$d\sigma_{fi}/p_f^2\, do_f = d\sigma_{i^*f^*}/p_i^2\, do_{i^*}. \qquad (144,13)$$

Оно выражает собой *принцип детального равновесия*.

Как было указано в § 126, в случае применимости теории возмущений в первом ее приближении, наряду с теоремой взаимности, имеет место также и дополнительное соотношение между амплитудами прямого и обратного (в буквальном смысле слова) процессов: $i \to f$ и $f \to i$. Это свойство, выражающееся равенством $f_{fi} = f_{if}^*$, имеет место (в том же приближении) и для неупругих процессов. Соответствующие сечения связаны равенством

$$d\sigma_{fi}/p_f^2\, do_f = d\sigma_{if}/p_i^2\, do_i. \qquad (144,14)$$

Разница между переходами $i \to f$ и $i^* \to f^*$ исчезает, если рассматривать интегральные сечения, проинтегрированные по всем направлениям $\mathbf{p}_f$, просуммированные по направлениям спинов конечных частиц s_{1f}, s_{2f} и усредненные по направлениям импульса $\mathbf{p}_i$ и спинов s_{1i}, s_{2i} начальных частиц. Обозначим такое сечение через $\bar{\sigma}_{fi}$:

$$\bar{\sigma}_{fi} = \frac{1}{4\pi\,(2s_{1i}+1)\,(2s_{2i}+1)} \sum_{(m_s)} \int d\sigma_{fi}\, do_i;$$

сумма берется по проекциям спинов всех частиц; множитель же перед знаком сумм и интегралов связан с тем, что по величинам, относящимся к начальным частицам, производится не суммирование, а усреднение. Написав (144,13) в виде

$$p_i^2\, d\sigma_{fi}\, do_{i^*} = p_f^2\, d\sigma_{i^*f^*}\, do_f$$

и произведя указанные действия, получим искомое соотношение

$$g_i p_i^2 \bar{\sigma}_{fi} = g_f p_f^2 \bar{\sigma}_{if}. \qquad (144,15)$$

Через g_i и g_f здесь обозначены величины

$$g_i = (2s_{1i}+1)\,(2s_{2i}+1), \quad g_f = (2s_{1f}+1)\,(2s_{2f}+1), \qquad (144,16)$$

[1]) Для сложных частиц (атом, атомное ядро) под «спином» надо понимать здесь полный собственный момент, составленный как из спинов, так и из орбитальных моментов внутренних движений составных частей.

[2]) Мы отвлекаемся здесь от множителя -1, который может возникнуть для столкновений частиц, обладающих спином (ср. (140,11)). Это обстоятельство не отражается, конечно, на соотношении (144,13) для сечений.

определяющие числа возможных ориентаций спинов пары начальных и пары конечных частиц; эти числа называют *статистическими весами* состояний i и f.

Наконец, отметим следующее свойство амплитуд f_{fi}. Мы видели в предыдущем параграфе, что сечение реакции меняется при $p_i \to 0$ по закону $\sigma_{fi} \sim 1/p_i$ (при достаточно быстром убывании взаимодействия на больших расстояниях). Согласно формуле (144,4) это означает, что $f_{fi} \to \text{const}$ при $p_i \to 0$. В силу симметрии (144,12) отсюда следует, что f_{fi} стремится к постоянному пределу также и при $p_f \to 0$. Мы еще вернемся к этому свойству в § 147.

§ 145. Формулы Брейта и Вигнера

В § 134 было введено понятие о квазистационарных состояниях, как о состояниях, обладающих конечной, но сравнительно большой продолжительностью жизни. С широкой категорией таких состояний мы имеем дело в области ядерных реакций при не слишком больших энергиях, идущих через стадию образования *составного ядра* [1]).

Наглядная физическая картина происходящих при этом процессов заключается в том, что падающая на ядро частица, взаимодействуя с нуклонами ядра, «сливается» с ним, образуя составную систему, в которой привнесенная частицей энергия распределяется между многими нуклонами. Резонансные энергии соответствуют квазидискретным уровням этой составной системы. Большая (по сравнению с периодами движения нуклонов в ядре) продолжительность жизни квазистационарных состояний связана с тем, что в течение большей части времени энергия распределена между многими частицами, так что каждая из них обладает энергией, недостаточной для того, чтобы вылететь из ядра, преодолев притяжение остальных частиц. Лишь сравнительно редко на одной частице концентрируется достаточно большая для этого энергия. При этом распад составного ядра может произойти различными способами, отвечающими различным возможным каналам реакции [2]).

Описанный характер таких столкновений позволяет утверждать, что возможность неупругих процессов в них не сказывается на потенциальной части амплитуды упругого рассеяния, не связанной со свойствами составного ядра (см. § 134); они меняют лишь величину резонансной части амплитуды упругого рассея-

---

[1]) Представление о составном ядре было выдвинуто *Н. Бором* (1936).

[2]) В число конкурирующих процессов входит также радиационный захват падающей частицы, при котором возбужденное составное ядро переходит в свое основное состояние, испуская γ-квант. Этот процесс тоже «медленен» ввиду сравнительно малой вероятности излучательного перехода.