

или $\theta = 4p_{\perp}/p_0$, где p_{\perp} — поперечная (по отношению к направлению p_0) компонента вектора p , а θ — малый угол между направлениями p_1 и p_2 . Переписав формулу (146,3) в виде

$$dw_p = \text{const} \frac{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}}{\frac{1}{m}(p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2) + |\varepsilon|}$$

и проинтегрировав по dp_{\parallel} , найдем распределение вероятностей по углу θ . Ввиду быстрой сходимости интеграла интегрирование можно распространить по области от $-\infty$ до ∞ , и окончательно находим

$$dw_{\theta} = \text{const} \cdot \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \frac{4|\varepsilon|}{E_0}}}. \quad (146,5)$$

Отнесенное к элементу телесного угла $do \approx 2\pi\theta d\theta$ угловое распределение имеет максимум при $\theta \sim \sqrt{|\varepsilon|/E_0}$.

§ 147. Поведение сечений вблизи порога реакции

Если сумма внутренних энергий продуктов реакции превышает таковую у первоначальных частиц, то реакция имеет *порог*: она может иметь место, лишь если кинетическая энергия E сталкивающихся частиц (в системе центра инерции) превышает определенное, пороговое, значение E_n . Рассмотрим характер энергетической зависимости сечения реакции вблизи ее порога. При этом будем считать, что в результате реакции образуются снова всего две частицы (реакция типа $A + B = A' + B'$).

Вблизи порога относительная скорость v' образовавшихся частиц мала. Такая реакция является обратной по отношению к реакции, в которой мала скорость сталкивающихся частиц. Зависимость ее сечения от v' может быть поэтому легко найдена с помощью принципа детального равновесия (144,13) по известной энергетической зависимости реакции, для которой v' было бы скоростью во входном канале (§ 143). В широкой категории реакций, когда между частицами A' и B' нет кулонова взаимодействия (таковы, например, ядерные реакции с образованием медленного нейтрона), мы находим, таким образом, что сечение реакции пропорционально v'^2 ($1/v'$), т. е. ¹⁾

$$\sigma_r \propto v'. \quad (147,1)$$

¹⁾ Отмеченное в конце § 144 постоянство предела, к которому стремится амплитуда f_{fl} при $p_f \rightarrow 0$, как раз соответствует этому результату — сечение (144,4) пропорционально p_f .

Тем самым мы находим и зависимость сечения от энергии сталкивающихся частиц: скорость v' , а с ней и сечение реакции пропорциональны корню из разности $E - E_{\pi}$:

$$\sigma_r = A \sqrt{E - E_{\pi}}. \quad (147,2)$$

Амплитуды рассеяния по различным каналам связаны друг с другом соотношениями унитарности. Благодаря этой связи открытие нового канала приводит к появлению определенных особенностей в энергетических зависимостях сечений также и других процессов, в том числе упругого рассеяния (E. Wigner, 1948; А. И. Базь, 1957; G. Breit, 1957). Для выяснения происхождения и характера этого явления рассмотрим простейший случай, когда ниже порога реакции возможно лишь упругое рассеяние.

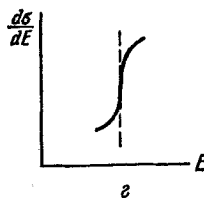
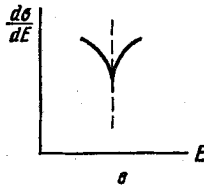
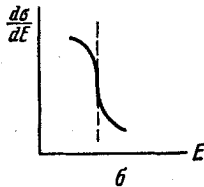
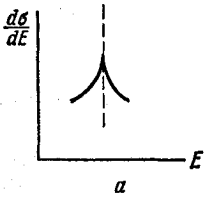


Рис. 50

Вблизи порога частицы A' и B' образуются в состоянии с орбитальным моментом $l = 0$ (именно этому и соответствует закон (147,2)). Если участвующие в реакции частицы не имеют спина, то орбитальный момент сохраняется, и потому система частиц $A + B$ тоже находится в s -состоянии. Согласно (142,7) парциальное сечение реакции для $l = 0$ связано с элементом S -матрицы, соответствующим упругому рассеянию, формулой

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |S_0|^2), \quad (147,3)$$

где k — волновой вектор сталкивающихся частиц. Приравняв (147,2) и (147,3), найдем, что выше порога реакции, вблизи от него, модуль $|S_0|$ с точностью до величин порядка $\sqrt{E - E_{\pi}}$ равен

$$|S_0| = 1 - \frac{k_{\pi}^2}{2\pi} A \sqrt{E - E_{\pi}}, \quad E > E_{\pi}, \quad (147,4)$$

где $k_{\pi} = \sqrt{2mE_{\pi}}/\hbar$ (m — приведенная масса частиц A и B). В области ниже порога имеется лишь упругое рассеяние, так что

$$|S_0| = 1, \quad E < E_{\pi}, \quad (147,5)$$

Но амплитуда рассеяния, а с нею и S_0 должны быть аналитическими функциями во всей области изменения энергии. Такая

функция, принимающая значения (147,4) и (147,5) выше и ниже порога, дается с той же точностью формулой *

$$S_0 = e^{2i\delta_0} \left(1 - \frac{k_{\pi}^2}{2\pi} A \sqrt{E - E_{\pi}} \right), \quad (147,6)$$

где δ_0 — постоянная (при $E < E_{\pi}$ корень $\sqrt{E - E_{\pi}}$ становится мнимым и модуль стоящего в скобках выражения отличается от единицы лишь на величину более высокого порядка малости).

При всех же $l \neq 0$ неупругое рассеяние отсутствует, так что

$$S_l = e^{2i\delta_l}, \quad l \neq 0, \quad (147,7)$$

причем в области вблизи порога фазы δ_l следует положить равными их значению при $E = E_{\pi}$ ¹⁾.

Подставив полученные значения S_l в формулу (142,2), найдем следующее выражение для амплитуды рассеяния вблизи порога реакции:

$$f(\theta, E) = f_{\pi}(\theta) - \frac{k_{\pi}}{4\pi i} A \sqrt{E - E_{\pi}} e^{2i\delta_0}, \quad (147,8)$$

где $f_{\pi}(\theta)$ — амплитуда рассеяния при $E = E_{\pi}$. Отсюда дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f_{\pi}(\theta)|^2 + \frac{k_{\pi}}{2\pi} A \sqrt{E - E_{\pi}} \operatorname{Im} \{ f_{\pi}(\theta) e^{-2i\delta_0} \} \quad \text{при } E > E_{\pi},$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f_{\pi}(\theta)|^2 - \frac{k_{\pi}}{2\pi} A \sqrt{E - E_{\pi}} \operatorname{Re} \{ f_{\pi}(\theta) e^{-2i\delta_0} \} \quad \text{при } E < E_{\pi}.$$

Представив амплитуду f_{π} в виде $|f_{\pi}| e^{i\alpha(\theta)}$, запишем окончательно этот результат в форме

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f_{\pi}(\theta)|^2 - \frac{k_{\pi}}{2\pi} A |f_{\pi}(\theta)| \sqrt{|E - E_{\pi}|} \begin{cases} \sin(2\delta_0 - \alpha), & E > E_{\pi}, \\ \cos(2\delta_0 - \alpha), & E < E_{\pi}. \end{cases} \quad (147,9)$$

В зависимости от того, находится ли угол $2\delta_0 - \alpha$ в 1-м, 2-м, 3-м или 4-м квадранте, описываемая этой формулой энергетическая зависимость сечения имеет вид, изображенный на рис. 50, а, б, в или г. Во всех случаях мы имеем две ветви, лежащие по обе стороны от общей вертикальной касательной.

При интегрировании выражений (147,9) по $d\omega$ в интегралы от вторых членов отличный от нуля вклад дает только изотропная часть амплитуды $f_{\pi}(\theta)$ — парциальная амплитуда упругого

¹⁾ Поскольку функции $\delta_l(E)$ вещественны как при $E > E_{\pi}$, так и при $E < E_{\pi}$, они разлагаются по целым степеням разности $E - E_{\pi}$.

s -рассеяния: $(e^{2i\delta_0} - 1)/2ik_{\pi}$. В результате получим для полного сечения упругого рассеяния вблизи порога следующее выражение:

$$\sigma = \sigma_{\pi} - 2A \sqrt{|E - E_{\pi}|} \begin{cases} \sin^2 \delta_0 & \text{при } E > E_{\pi}, \\ \sin \delta_0 \cos \delta_0 & \text{при } E < E_{\pi}. \end{cases} \quad (147,10)$$

Эта зависимость имеет вид a или b на рис. 50 соответственно при положительном или отрицательном знаке $\sin \delta_0 \cos \delta_0$.

Таким образом, существование порога реакции приводит к появлению характерной особенности в энергетической зависимости сечения упругого рассеяния. Наличие спина у частиц меняет, разумеется, количественные формулы, но общий характер явления остается тем же ¹⁾. Если ниже порога возможны, наряду с упругим рассеянием, также и другие реакции, то аналогичные особенности появляются и в их сечениях. Все они имеют при $E = E_{\pi}$ особенность, вблизи которой являются линейными функциями корня $\sqrt{|E - E_{\pi}|}$ с различными наклонами выше и ниже порога.

В ядерных реакциях с вылетом положительно заряженной частицы имеем дело со случаем, когда между продуктами реакции (частицы A' и B') действуют силы кулонова отталкивания. В этом случае сечение реакции при $v' \rightarrow 0$ (т. е. $E \rightarrow E_{\pi}$) экспоненциально стремится к нулю вместе со всеми своими производными по энергии и никакой особенности в сечениях других процессов не возникает.

Наконец, рассмотрим реакции с образованием двух разноименно заряженных медленных частиц, между которыми действуют силы кулонова притяжения. Сечение такой реакции связано принципом детального равновесия с сечением (143,6) обратной реакции между двумя медленными притягивающимися частицами. Таким образом, находим, что при $v' \rightarrow 0$ сечение стремится к постоянному пределу

$$\sigma_r = \text{const при } v' \rightarrow 0, \quad (147,11)$$

т. е. за порогом реакция возникает сразу с конечным сечением.

Выясним характер особенности, которой обладает вблизи порога такой реакции сечение упругого рассеяния (А. И. Базь, 1959). Это, однако, не может быть сделано непосредственно по известному надпороговому закону (147,11) тем простым способом, который мы использовали выше в случае незаряженных частиц. По сравнению с последним случаем ситуация осложняется теперь в связи с тем, что система частиц $A' + B'$ обладает в околпороговой области (при $E < E_{\pi}$) связанными состояниями, соответствующими

¹⁾ При отличных от нуля спинах система частиц $A' + B'$ в s -состоянии может иметь отличный от нуля полный момент, в связи с чем появляется возможность различных орбитальных состояний системы $A + B$.

щими дискретным уровням энергии в кулоновом поле притяжения. Эти состояния могут, с энергетической точки зрения, образоваться при столкновении частиц A и B , но ввиду возможности упругого рассеяния они будут лишь квазистационарными. Однако их существование должно привести к появлению резонансных эффектов в (подпороговом) упругом рассеянии, аналогичных брейт-вигнеровским резонансам.

Для решения поставленной задачи рассмотрим структуру волновых функций, описывающих процесс столкновения. В соответствии с наличием двух каналов уравнение Шредингера системы взаимодействующих частиц имеет два независимых решения, конечных во всем конфигурационном пространстве; обозначим два таких произвольно выбранных (и произвольно нормированных) решения посредством ψ_1 и ψ_2 . Из этих функций можно составить линейные комбинации, описывающие рассеяние в случае, когда тот или иной из каналов является входным. Обозначим каналы, соответствующие парам частиц A, B и A', B' посредством a и b , и пусть сумма $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$ отвечает случаю входного канала a ; она описывает упругое рассеяние частиц A и B и реакцию $A + B \rightarrow A' + B'$. Вблизи порога реакции коэффициенты α_1, α_2 существенно зависят от малого импульса k_b , между тем как сами произвольно выбранные функции ψ_1, ψ_2 никакой особенности при $k_b = 0$ не имеют.

На больших расстояниях функция ψ должна представлять собой сумму двух членов, соответствующих движению пар частиц в каналах a и b . Каждый из них есть произведение «внутренних» функций частиц на волновую функцию их относительного движения¹⁾. В канале a последняя имеет вид $R_a^- - S_{aa} R_a^+$, а в канале b : $-S_{ab} R_b^+$, где R^+, R^- — расходящаяся и сходящаяся волны в соответствующих каналах. На расстояниях r_0 , больших по сравнению с радиусом короткодействующих сил и малых по сравнению с $1/k_b$, эти функции (и их производные) должны «сшиваться» со значениями, вычисляемыми по волновой функции ψ_1 в «зоне реакции». Эти условия выражаются равенствами вида

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (R_a^- - S_{aa} R_a^+) |_{r_0}, \quad \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = -S_{ab} R_b^+ |_{r_0},$$

$$\alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' = (R_a^- - S_{aa} R_a^+) ' |_{r_0}, \quad \alpha_1 b_1' + \alpha_2 b_2' = -S_{ab} R_b^+ ' |_{r_0},$$

где $a_1, a_1', b_1, b_1', \dots$ — величины, вычисляемые по функциям ψ и ψ_2 ; согласно сказанному выше вблизи порога их можно считать

¹⁾ Закон (147,11) имеет место не только для полного, но и для парциальных сечений с различными моментами l (ср. конец § 143). Поэтому и рассматриваемая ниже особенность имеет место во всех парциальных сечениях рассеяния. Ее характер полностью выясняется уже в случае $l = 0$, который мы и рассматриваем ниже. Индекс 0 у соответствующих парциальных амплитуд опускаем для упрощения обозначений.

постоянными, не зависящими от k_b . Разделив почленно первую и вторую пару написанных равенств, мы получим систему двух линейных уравнений для двух неизвестных (α_1/α_2 и S_{aa}), причем в коэффициентах этих уравнений фигурирует лишь одна величина, «критически» зависящая от k_b — логарифмическая производная от расходящейся волны в канале b ; определим эту величину как

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{(rR_b^+)' }{rR_b^+} \Big|_{r=r_0}.$$

Нет необходимости фактически проводить решение этих уравнений. Достаточно заметить, что интересующая нас величина S_{aa} (определяющая амплитуду упругого рассеяния) оказывается при этом дробно-линейной функцией от λ . Ниже порога величина λ вещественна, так как вещественна волновая функция R_b^+ — решение вещественного уравнения Шредингера при вещественном условии на бесконечности (убывание как $e^{-\kappa_b r}$, где $\kappa_b = \sqrt{2m_b(E_{\text{п}} - E)/\hbar}$). В то же время ниже порога должно быть $|S_{aa}| = 1$. Отсюда следует, что дробно-линейная функция $S_{aa}(\lambda)$ должна иметь вид

$$S_{aa} = \frac{1 + \beta\lambda}{1 + \beta^*\lambda} e^{2i\eta}, \quad (147,12)$$

где η — вещественная, β — комплексная постоянная.

Определим величину λ как функцию импульса k_b . Поскольку между частицами A и B действуют силы кулонова притяжения, то rR_b^+ дается кулоновой волновой функцией, асимптотически пропорциональной на бесконечности $e^{ik_b r}$. В кулоновом поле отталкивания эта функция дается суммой $G_0 + iF_0$ с G_0 и F_0 из (138,4) и (138,7). Переход же к полю притяжения осуществляется одновременным изменением знаков k и r ¹⁾. Произведя эту замену и вычислив логарифмическую производную (см. § 138), получим²⁾

$$\lambda = \frac{i}{1 - \exp(-2\pi/k_b)} - \frac{1}{\pi} \left\{ \ln k_b + \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{i}{k_b}\right) + \psi\left(-\frac{i}{k_b}\right) \right] \right\}. \quad (147,13)$$

Здесь k_b предполагается вещественной величиной, так что эта формула относится к области выше порога. При $k_b \rightarrow 0$ первый

¹⁾ Ниже мы пользуемся кулоновыми единицами. Изменение знаков k и r формально соответствует изменению знака кулоновой единицы длины.

²⁾ В фигурных скобках опущена, для упрощения дальнейших формул, не зависящая от k_b вещественная постоянная ($-\ln 2r_0 - 2C$), что сводится лишь к несущественному переопределению комплексной величины β и вещественной величины η в (147,12).

член в (147,13) обращается в i , а второй стремится к нулю (см. примечание на стр. 665). Таким образом, выше порога имеем

$$\lambda = i, \quad E > E_{\text{п}}. \quad (147,14)$$

Переход к области ниже порога осуществляется заменой k на ik . После этого получим из (147,13) при $\kappa \rightarrow 0$ ¹⁾

$$\lambda = -\text{ctg} \frac{\pi}{\kappa_b}, \quad E < E_{\text{п}}. \quad (147,15)$$

Полученные формулы решают поставленный вопрос. Сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k_a^2} |S_{aa} - 1|^2.$$

Выше порога имеем

$$S_{aa} = \frac{1 + i\beta}{1 + i\beta^*} e^{2i\eta}, \quad E > E_{\text{п}}; \quad (147,16)$$

как и сечение реакции, сечение рассеяния оказывается в этой области постоянным. Отметим, что условие $|S_{aa}| \leq 1$ означает, что должно быть $\text{Im} \beta > 0$.

Ниже порога находим

$$S_{aa} = e^{2i\eta} \frac{\beta - \text{tg}(\pi/\kappa_b)}{\beta^* - \text{tg}(\pi/\kappa_b)}. \quad (147,17)$$

Это выражение имеет бесконечное число резонансов, сгущающихся по направлению к точке $E = E_{\text{п}}$. Резонансные энергии являются корнями уравнения $S_{aa} = -1$, т. е.

$$\text{Re} e^{i\eta} \left(\beta - \text{tg} \frac{\pi}{\kappa_b} \right) = 0;$$

они смещены относительно чисто кулоновых уровней (корней уравнения $\text{tg}(\pi/\kappa_b) = 0$) благодаря наличию короткодействующих сил. По мере приближения энергии E к порогу сечение упругого

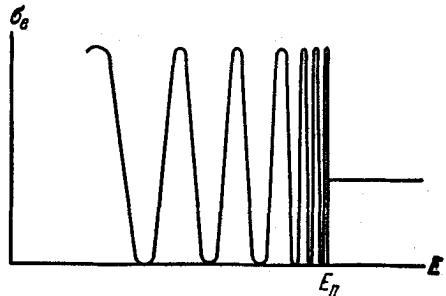


Рис. 51

¹⁾ Первый член в (147,13) дает $-\frac{1}{2} \text{ctg} \frac{\pi}{\kappa_b} + \frac{l}{2}$, а выражение в фигурных скобках обращается в $\frac{\pi}{2} \text{ctg} \frac{\pi}{\kappa_b} + \frac{i\pi}{2}$. При этом используется формула $\psi(x) - \psi(-x) = -\pi \text{ctg} \pi x - 1/x$ (которую можно получить логарифмическим дифференцированием известного соотношения $\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\pi/x \sin \pi x$) и предельное выражение $\psi(x) \approx \ln x - 1/2x$ при $x \rightarrow \infty$.

рассеяния осциллирует между нулем и $4\pi/k_a^2$, как это показано схематически на рис. 51. Ширина всей подпороговой области, в которой обнаруживается резонансная структура, определяется величиной энергии первого кулонова уровня ¹⁾.

§ 148. Неупругие столкновения быстрых электронов с атомами

Неупругие столкновения быстрых электронов с атомами могут быть рассмотрены с помощью борновского приближения аналогично тому, как это было сделано в § 139 для упругих столкновений ²⁾. Условие применимости борновского приближения по-прежнему требует, чтобы скорость падающего электрона была велика по сравнению со скоростями атомных электронов. Что же касается потери энергии при столкновении, то она может быть любой. Если электрон теряет значительную часть своей энергии, то это приводит к ионизации атома, причем энергия передается одному из его электронов. Но мы всегда можем считать рассеянным тот из обоих электронов, который имеет после столкновения большую скорость, и, таким образом, при большой скорости падающего электрона будет велика также и скорость рассеянного.

При столкновениях электрона с атомом систему координат, в которой покоится их центр инерции, можно считать, как уже указывалось, совпадающей с системой, в которой покоится атом; ниже мы будем говорить именно об этой последней системе.

Неупругое столкновение сопровождается изменением внутреннего состояния атома. Атом может перейти из нормального состояния в возбужденное состояние дискретного или непрерывного спектра; в последнем случае это означает ионизацию атома. При выводе общих формул эти случаи можно рассматривать вместе.

Исходим (как и в § 126) из общей формулы для вероятности перехода между состояниями непрерывного спектра, применяя ее

¹⁾ Упомянем еще один интересный случай окологороговых реакций — ионизация атома электроном, энергия которого лишь немного превосходит энергию первой ионизации атома. В этих условиях процесс столкновения может рассматриваться как квазиклассический, но задача очень усложняется наличием трех заряженных частиц в конечном состоянии. Общее решение этой трудной задачи дано Ванье (*G. H. Wannier, Phys. Rev. 90, 817 (1953)*). Вероятность ионизации нейтрального атома оказывается пропорциональной:

$$(E - I)^\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{91}{3}} - 1 \right) = 1,13,$$

где $E - I$ — избыток энергии электрона над порогом ионизации.

²⁾ Большинство результатов, излагаемых в § 148—150, было получено Бете (*H. A. Bethe, 1930*).