эффектов, разумеется, нет. Для тяжелых частиц характерно, что большая передача импульса ($qa_0 \gg 1$) отнюдь не означает отклонения на большой угол; ϑ всегда остается малым. Сечение ионизации с испусканием электрона с энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ получится непосредственно из формулы (148,25), которую мы пишем в виде

$$d\sigma_r = 8\pi \left(\frac{ze^2}{\hbar v}\right)^2 Z \frac{dq}{q^3}$$

и полагаем $\hbar^2 q^2/2m = \varepsilon$ (весь импульс $\hbar\mathbf{q}$ передается одному атомному электрону). Это даст

$$d\sigma_\varepsilon = \frac{2\pi Z z^2 e^4}{mv^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \qquad (150,8)$$

При столкновениях тяжелых частиц с атомами особый интерес представляют интегральные эффективные сечения и торможения. Полное сечение неупругого рассеяния определяется прежней формулой (148,26). Полное эффективное торможение получается подстановкой в (149,12) вместо q_1 максимальной возможной передачи импульса $q_{\max}$. Последнюю легко выразить через скорость частицы следующим образом. Поскольку $\hbar q_{\max}$ все еще мало по сравнению с первоначальным импульсом Mv частицы, то изменение ее энергии связано с изменением импульса соотношением $\Delta E = \mathbf{v}\cdot\hbar\mathbf{q}$. С другой стороны при большой передаче импульса вся эта энергия передается в основном одному атомному электрону, так что мы можем написать

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \hbar\mathbf{v}\mathbf{q} \leqslant \hbar v q.$$

Отсюда имеем $\hbar q \leqslant 2mv$, т. е.

$$\hbar q_{\max} = 2mv, \quad \varepsilon_{\max} = 2mv^2. \qquad (150,9)$$

Отметим, что наибольший угол отклонения частицы при неупругом рассеянии равен

$$\vartheta_{\max} = \frac{\hbar q_{\max}}{Mv} = \frac{2m}{M}.$$

Подставляя (150,9) в (149,12), получим полное эффективное торможение тяжелой частицы:

$$\varkappa = \frac{4\pi Z z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I}. \qquad (150,10)$$

§ 151. Рассеяние нейтронов

В ряде физических задач теории столкновений мы встречаемся с необходимостью выяснить влияние, которое оказывает на процесс рассеяния собственное движение рассеивающих центров.

В определенных условиях оказывается возможным применить к решению таких задач своеобразную теорию возмущений, развитую *Ферми* (1936), хотя к рассеянию на каждом центре самом по себе теория возмущений может и не быть применимой. К такого рода вопросам относится, в частности, задача о рассеянии медленных нейтронов на системе атомов, скажем, на молекуле.

Для определенности будем говорить ниже именно об этой задаче.

Электроны практически не рассеивают нейтронов, так что все рассеяние фактически происходит на ядрах [1]). Будем считать, что амплитуда рассеяния отдельным ядром мала по сравнению с межатомными расстояниями. Тогда амплитуда волны, рассеянной каждым из ядер в молекуле, становится малой уже в точках нахождения других ядер. В этих условиях амплитуда рассеяния молекулой сводится к сумме амплитуд рассеяния отдельными ядрами.

К столкновению нейтрона с ядром теория возмущений, вообще говоря, неприменима; хотя радиус действия ядерных сил мал, но в пределах этого радиуса силы очень велики. Существенно, однако, что амплитуда рассеяния медленного нейтрона (длина волны нейтрона велика по сравнению с размерами ядра) есть постоянная величина, не зависящая от скорости. Пусть f_a — амплитуда рассеяния на a-м ядре; $|f_a|^2 do$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния нейтрона на свободном ядре (в системе их центра инерции).

Постоянная амплитуда может быть формальным образом получена из теории возмущений, если описывать взаимодействие нейтрона с ядром «точечной» потенциальной энергией

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi\hbar^2}{M} f\delta(\mathbf{r}), \tag{151,1}$$

где M — приведенная масса нейтрона и ядра. При подстановке этого выражения в формулу Борна (126,4) δ-функция обращает интеграл в постоянную величину, не зависящую от $\mathbf{q}$. Определенное таким образом «поле» $U(\mathbf{r})$ называют *псевдопотенциалом*. Подчеркнем, что возможность его введения связана именно с постоянством f.

В общем случае произвольной энергии нейтрона амплитуда рассеяния зависит от начального и конечного импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ в отдельности, а не только от их разности $\mathbf{q}$; между тем

---

[1]) Подразумевается также, что молекула не обладает магнитным моментом. В противном случае имеется еще специфический эффект рассеяния, связанного со взаимодействием магнитных моментов молекулы и нейтрона.

амплитуда, вычисленная в борновском приближении, может зависеть только от $\mathbf{q}$ [1]).

Если рассеивающее ядро совершает заданное движение (например, колебания в молекуле), то при усреднении по этому движению взаимодействие (151,1) «размазывается» по области с размерами, вообще говоря, большими по сравнению с амплитудой рассеяния f. Для такого «размазанного» взаимодействия выполняется условие (126,1) применимости борновского приближения.

Таким образом, будем описывать взаимодействие нейтрона с молекулой псевдопотенциалом

$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\hbar^2 \sum_a \frac{f_a}{M_a}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_a), \tag{151,2}$$

где суммирование производится по всем ядрам в молекуле; $\mathbf{R}_a$ — их радиусы-векторы; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор нейтрона. Подставив это выражение в формулу теории возмущений (148,3) (с приведенной массой молекулы и нейтрона $M_\text{м}$ в качестве m), получим следующую формулу для сечения рассеяния нейтрона молекулой в системе их центра инерции:

$$d\sigma_n = M_\text{м}^2 \frac{p'}{p} \left| \sum_a \frac{f_a}{M_a} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_a} | 0 \rangle \right|^2 do. \tag{151,3}$$

Матричные элементы берутся здесь по волновым функциям стационарных состояний движения ядер с энергиями E_0 и E_n, а импульсы p и p' связаны друг с другом законом сохранения энергии

$$\frac{p^2-p'^2}{2M_\text{м}} = E_n - E_0.$$

Формула (151,3) описывает неупругое столкновение, сопровождающееся определенным изменением состояния движения ядер в молекуле (переход $0 \to n$). Она решает поставленную задачу: по амплитудам рассеяния нейтронов на свободных ядрах (предполагающимся известными) ею определяется сечение рассеяния на молекуле с учетом собственного движения ядер и с учетом интерференционных эффектов от рассеяния на различных ядрах.

Если ядра обладают отличным от нуля спином, то должно быть еще учтено, что амплитуды рассеяния f_a зависят от суммарного спина рассеивающего ядра и нейтрона. Это может быть сделано следующим образом.

---

[1]) Подчеркнем также, что хотя псевдопотенциал дает правильное значение амплитуды рассеяния при формальном применении теории возмущений, это отнюдь не означает, что теория возмущений действительно применима к такому полю. Напротив, для потенциальной ямы с глубиной U_0, стремящейся к бесконечности по закону $U_0a^3 = \text{const}$ (a — стремящийся к нулю радиус ямы), условия (126,1), (126,2) заведомо не выполняются.

Суммарный спин ядра и нейтрона может принимать два значения: $j_a = i_a \pm 1/2$, где i_a — спин ядра; соответствующие значения амплитуды рассеяния обозначим через f_a^+ и f_a^-. Составим спиновый оператор, собственные значения которого при определенных значениях j_a были бы равны соответственно f_a^+ и f_a^-. Таковым является

$$\hat{f}_a = a_a + b_a \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{i}}_a, \tag{151,4}$$

где $\hat{\mathbf{i}}_a$ и $\hat{\mathbf{s}}$ — операторы спинов ядра и нейтрона, а коэффициенты a_a и b_a даются формулами

$$a_a = \frac{1}{2i_a + 1}\left[(i_a + 1) f_a^+ + i_a f_a^-\right], \qquad b_a = \frac{2}{2i_a + 1}(f_a^+ - f_a^-). \tag{151,5}$$

В этом легко убедиться, заметив, что при заданном значении j собственное значение оператора $\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{s}}$ есть

$$\mathbf{si} = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - i(i+1) - \frac{3}{4}\right].$$

Операторы (151,4) и должны быть подставлены в формулу (151,3) вместо f_a со взятием от них матричных элементов, отвечающих рассматриваемому переходу. Если падающие нейтроны и ядра мишени не поляризованы, то сечение рассеяния должно быть соответствующим образом усреднено.

Задачи

1. Произвести усреднение формулы (151,3), предполагая направление спинов нейтронов и ядер распределенными полностью беспорядочным образом. Все ядра в молекуле — различные.

Решение. Усреднения по направлениям спинов нейтронов и ядер независимы, а каждый из них при усреднении дает нуль; поэтому $\overline{\mathbf{si}_a} = 0$. Если молекула не содержит одинаковых атомов, то обменное взаимодействие ядерных спинов отсутствует, и в силу ничтожности их непосредственного взаимодействия направления спинов различных ядер в молекуле можно считать независимыми; поэтому обращаются в нуль при усреднении также и произведения вида $(\mathbf{si}_1)(\mathbf{si}_2)$. Для квадратов же $(\mathbf{si})^2$ имеем

$$\overline{(\mathbf{si})^2} = \frac{1}{3}\mathbf{s}^2\mathbf{i}^2 = \frac{s(s+1)\,i(i+1)}{3} = \frac{i(i+1)}{4}.$$

В результате получаем следующее выражение для усредненного сечения:

$$d\sigma_n = M_{\text{м}}^2 \frac{p'}{p}\left\{\left|\sum_a \frac{a_a}{M_a}\langle n|e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_a}|0\rangle\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sum_a \frac{i_a(i_a+1)}{M_a^2} b_a^2 \left|\langle n|e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_a}|0\rangle\right|^2\right\} do.$$

2. Применить формулу (151,3) к рассеянию медленных нейтронов на пара- и ортоводороде (*J. Schwinger, E. Teller*, 1937).

Решение. До вычисления матричных элементов спиновых операторов выражение (151,3) для рассеяния на молекуле H_2 имеет вид

$$d\sigma_n = \frac{16p'}{9p} \left| a \langle n | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} + e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle + b\widehat{\mathbf{s}} \langle n | \widehat{\mathbf{i}}_1 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} + \widehat{\mathbf{i}}_2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle \right|^2 do, \tag{1}$$

$$a = \frac{1}{4}(3f^+ + f^-), \qquad b = f^+ - f^-$$

($\pm\mathbf{r}/2$ — радиусы-векторы двух ядер в молекуле относительно их центра инерции).

Вращательные и колебательные состояния молекулы определяются квантовыми числами K, M_K, v (совокупность которых и надо понимать под n в (1)). В основном электронном состоянии молекулы H_2 четные значения K возможны лишь при полном ядерном спине $I = 0$ (параводород), а нечетные K — при $I = 1$ (ортоводород) (см. § 86). Поэтому следует различать два случая: 1) переходы между вращательными состояниями со значениями K одинаковой четности, возможные лишь без изменения I (переходы орто—орто и пара—пара), 2) переходы между состояниями со значениями K различной четности, возможные лишь с изменением I (переходы орто—пара и пара—орто).

В первом случае имеем

$$\langle n | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle = \langle n | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle = \left\langle n \left| \cos \frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{2} \right| 0 \right\rangle$$

(следует помнить, что вращательная волновая функция умножается на $(-1)^K$ при изменении знака $\mathbf{r}$). Спиновый оператор в (1) превращается тогда в $2a + b\mathbf{s}\widehat{\mathbf{I}}$, где $\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{i}}_1 + \widehat{\mathbf{i}}_2$. Этот оператор диагонален по I в соответствии со сказанным выше. Квадрат $(2a + b\mathbf{s}\mathbf{I})^2$ усредняется, как в задаче 1, и дает

$$4a^2 + \frac{b^2}{4} I(I+1).$$

В результате получим

$$d\sigma_n = \frac{4p'}{9p} \left| \left\langle n \left| \cos \frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{2} \right| 0 \right\rangle \right|^2 \{(3f^+ + f^-)^2 + I(I+1)(f^+ - f^-)^2\}\, do. \tag{2}$$

Во втором случае

$$\langle n | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle = -\langle n | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}/2} | 0 \rangle = i \left\langle n \left| \sin \frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{2} \right| 0 \right\rangle,$$

и спиновый оператор в (1) сводится к $\widehat{\mathbf{s}}(\widehat{\mathbf{i}}_1 - \widehat{\mathbf{i}}_2)$; он имеет лишь недиагональные по I матричные элементы. Квадрат модуля этих элементов, просуммированный по всем возможным значениям проекции полного спина $\mathbf{I}'$ в конечном состоянии, вычисляется как среднее значение (диагональный элемент) квадрата $(\mathbf{s}, \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)^2$ (см. примечание на стр. 674) и равен

$$\overline{(\mathbf{s}, \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)^2} = \frac{1}{3}\frac{3}{4}\overline{(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)^2} = \frac{1}{4}(2\mathbf{i}_1^2 + 2\mathbf{i}_2^2 - \mathbf{I}^2) = \frac{1}{4}[3 - I(I+1)].$$

В результате получим

$$d\sigma_n = (1)\,(3)\,\frac{4p'}{9p} \left| \left\langle n \left| \sin \frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{2} \right| 0 \right\rangle \right|^2 (f^+ - f^-)^2\, do, \tag{3}$$

где коэффициент (1) относится к орто—пара переходам, а коэффициент (3) — к пара—орто переходам.

Если нейтроны настолько медленны, что их длина волны велика также и по сравнению с размерами молекулы, то в матричных элементах в (2) и (3) можно положить $\cos(\mathbf{qr}/2) = 1$, $\sin(\mathbf{qr}/2) = 0$, в результате чего все они обращаются в нуль, за исключением диагонального элемента 00; естественно, что в этих условиях возможно лишь упругое рассеяние. Сечение упругого рассеяния в этом случае

$$d\sigma_e = \frac{4}{9}\left[(3f^+ + f^-)^2 + I(I+1)(f^+ - f^-)^2\right] do.$$

3. Определить сечение рассеяния нейтронов на связанном протоне, рассматриваемом как изотропный пространственный осциллятор с частотой ω (*E. Fermi*, 1936).

Решение. Рассматривая протон как колеблющийся вокруг закрепленной в пространстве точки, мы должны положить в формуле (151,3), по смыслу ее вывода, $M_м = M$ и $M_a = M/2$ (M — масса протона). Тогда

$$d\sigma_n = \frac{p'}{p}\frac{\sigma_0}{\pi}\sum\left|\int e^{-i\mathbf{qr}}\psi_{000}(\mathbf{r})\,\psi_{n_1n_2n_3}(\mathbf{r})\,dV\right|^2 do,$$

где $\sigma_0 = 4\pi|f|^2$ — сечение рассеяния на свободном протоне, а $\psi_{n_1n_2n_3}$ — собственные функции пространственного осциллятора, соответствующие уровням энергии $E_n = \hbar\omega(n + 3/2)$; суммирование производится по всем значениям n_1, n_2, n_3 с заданной суммой $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Функции $\psi_{n_1n_2n_3}$ представляют собой произведения волновых функций трех линейных осцилляторов (см. задачу 4 § 33). Поэтому нужный нам интеграл разбивается на произведение трех интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{iq_xx}{2} - \frac{\alpha^2x^2}{2} - \frac{\alpha^2x^2}{2}\right)H_{n_1}(\alpha x)\,dx$$

($\alpha = \sqrt{M\omega/\hbar}$), которые вычисляются путем подстановки $H_n(x)$ в виде (а,4) и n-кратного интегрирования по частям. В результате получим

$$d\sigma_n = \frac{1}{\pi}\frac{v'}{v}\frac{\sigma_0}{2^n\alpha^{2n}}\sum\frac{q_x^{2n_1}q_y^{2n_2}q_z^{2n_3}}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do.$$

Суммирование производится по биномиальной формуле, и окончательно находим

$$d\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\pi n!}\sqrt{\frac{E'}{E}}\left(\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)^n\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do.$$

В частности, сечение упругого рассеяния ($n = 0$, $E = E'$)

$$d\sigma_e = \frac{\sigma_0}{\pi}\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do, \qquad \sigma_e = \sigma_0\frac{\hbar\omega}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{4E}{\hbar\omega}\right)\right].$$

Если $E/\hbar\omega \to 0$, то $\sigma_e \to 4\sigma_0$.

§ 152. Неупругое рассеяние при больших энергиях

Эйкональное приближение, использованное в § 131 для задачи о взаимном рассеянии двух частиц, может быть обобщено таким образом, чтобы охватить собой также и процессы (в том числе неупругие) при столкновениях быстрой частицы с системой частиц — «мишенью» (*R. J. Glauber*, 1958).