Если нейтроны настолько медленны, что их длина волны велика также и по сравнению с размерами молекулы, то в матричных элементах в (2) и (3) можно положить $\cos(\mathbf{qr}/2) = 1$, $\sin(\mathbf{qr}/2) = 0$, в результате чего все они обращаются в нуль, за исключением диагонального элемента 00; естественно, что в этих условиях возможно лишь упругое рассеяние. Сечение упругого рассеяния в этом случае

$$d\sigma_e = \frac{4}{9}\left[(3f^+ + f^-)^2 + I(I+1)(f^+ - f^-)^2\right] do.$$

3. Определить сечение рассеяния нейтронов на связанном протоне, рассматриваемом как изотропный пространственный осциллятор с частотой ω (*E. Fermi*, 1936).

Решение. Рассматривая протон как колеблющийся вокруг закрепленной в пространстве точки, мы должны положить в формуле (151,3), по смыслу ее вывода, $M_м = M$ и $M_a = M/2$ (M — масса протона). Тогда

$$d\sigma_n = \frac{p'}{p}\frac{\sigma_0}{\pi}\sum\left|\int e^{-i\mathbf{qr}}\psi_{000}(\mathbf{r})\,\psi_{n_1n_2n_3}(\mathbf{r})\,dV\right|^2 do,$$

где $\sigma_0 = 4\pi|f|^2$ — сечение рассеяния на свободном протоне, а $\psi_{n_1n_2n_3}$ — собственные функции пространственного осциллятора, соответствующие уровням энергии $E_n = \hbar\omega(n + 3/2)$; суммирование производится по всем значениям n_1, n_2, n_3 с заданной суммой $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Функции $\psi_{n_1n_2n_3}$ представляют собой произведения волновых функций трех линейных осцилляторов (см. задачу 4 § 33). Поэтому нужный нам интеграл разбивается на произведение трех интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{iq_xx}{2} - \frac{\alpha^2x^2}{2} - \frac{\alpha^2x^2}{2}\right)H_{n_1}(\alpha x)\,dx$$

($\alpha = \sqrt{M\omega/\hbar}$), которые вычисляются путем подстановки $H_n(x)$ в виде (а,4) и n-кратного интегрирования по частям. В результате получим

$$d\sigma_n = \frac{1}{\pi}\frac{v'}{v}\frac{\sigma_0}{2^n\alpha^{2n}}\sum\frac{q_x^{2n_1}q_y^{2n_2}q_z^{2n_3}}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do.$$

Суммирование производится по биномиальной формуле, и окончательно находим

$$d\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\pi n!}\sqrt{\frac{E'}{E}}\left(\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)^n\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do.$$

В частности, сечение упругого рассеяния ($n = 0$, $E = E'$)

$$d\sigma_e = \frac{\sigma_0}{\pi}\exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right)do, \qquad \sigma_e = \sigma_0\frac{\hbar\omega}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{4E}{\hbar\omega}\right)\right].$$

Если $E/\hbar\omega \to 0$, то $\sigma_e \to 4\sigma_0$.

§ 152. Неупругое рассеяние при больших энергиях

Эйкональное приближение, использованное в § 131 для задачи о взаимном рассеянии двух частиц, может быть обобщено таким образом, чтобы охватить собой также и процессы (в том числе неупругие) при столкновениях быстрой частицы с системой частиц — «мишенью» (*R. J. Glauber*, 1958).

В этом обобщении основные предположения остаются прежними. Энергия падающей частицы E предполагается настолько большой, что $E \gg |U|$ и $ka \gg 1$, где U — энергия ее взаимодействия с частицами мишени, а a — радиус этого взаимодействия. Рассматривается рассеяние с относительно малой передачей импульса: изменение $\hbar\mathbf{q}$ импульса падающей частицы мало по сравнению с ее первоначальным импульсом $\hbar\mathbf{k}$: $q \ll k$. Это условие подразумевает теперь, однако, не только малость угла рассеяния, но и относительную малость передаваемой энергии.

Кроме того, будем считать, что скорость падающей частицы v велика по сравнению со скоростями v_0 частиц внутри мишени:

$$v \gg v_0. \tag{152,1}$$

Для рассеяния заряженных частиц на атомах это условие равносильно применимости борновского приближения (ср. § 148, 150): из $v \gg v_0$ автоматически следует $|U|\,a/\hbar v \ll 1$; необходимости в развиваемой здесь теории в этом случае, следовательно, вообще не возникает. Иная ситуация, однако, имеет место для ядерных мишеней, в которых частицы связаны не кулоновыми, а ядерными силами. Ниже мы будем, для определенности, говорить о рассеянии быстрой частицы на ядре [1]).

Условие (152,1) позволяет рассматривать движение падающей частицы при заданных положениях нуклонов в ядре [2]). Другими словами, волновая функция системы частица + мишень может быть представлена в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots) = \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots)\,\Phi_i(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots). \tag{152,2}$$

Здесь $\Phi_i(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots)$ — волновая функция некоторого (i-го) внутреннего состояния ядра ($\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots$ — радиусы-векторы нуклонов в нем). Множитель же $\varphi(\mathbf{r}; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots)$ — волновая функция рассеиваемой частицы ($\mathbf{r}$ — ее радиус-вектор) при заданных значениях $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots$, играющих роль параметров в уравнении Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \sum_a U_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)\right]\varphi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi, \tag{152,3}$$

где $U_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)$ — энергия взаимодействия частицы с a-м нуклоном, $\hbar\mathbf{k}$ — ее импульс на бесконечности [3]).

---

[1]) Для сколько-нибудь тяжелых ядер условие (152,1) приводит к релятивистским скоростям v. Излагая в этом параграфе формальный аппарат в рамках нерелятивистской теории, мы оставляем в стороне вопрос о его фактической применимости к тем или иным конкретным процессам рассеяния.

[2]) Такое приближение аналогично тому, которое лежит в основе теории молекул, где электронное состояние рассматривается при заданном расположении ядер.

[3]) В (152,3) предполагается, что взаимодействие частицы с ядром сводится к сумме ее парных взаимодействий с отдельными нуклонами.

Если мы найдем решение уравнения (152,3) с асимптотической формой

$$\varphi = e^{i\mathbf{kr}} + F(\mathbf{n}', \mathbf{n}; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{152,4}$$

($\mathbf{n}' = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$), то волновая функция (152,2)

$$\psi = e^{i\mathbf{kr}}\Phi_i + F\Phi_i\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{152,5}$$

будет описывать рассеяние на ядре, находящемся (до столкновения) в своем i-м состоянии: падающая волна $e^{i\mathbf{kr}}$ входит в (152,5) в произведении с Φ_i. Второй член в (152,5) представляет рассеянную волну. Однако это выражение пригодно для определения амплитуды рассеяния лишь при условии достаточно малого изменения энергии падающей частицы, т. е. малого изменения внутренней энергии ядра; рассматривая движение частицы в постоянном поле «неподвижно закрепленных» нуклонов (чему соответствует уравнение (152,3)), мы тем самым пренебрегаем возможным изменением энергии этого движения.

Для выделения амплитуды рассеяния с определенным изменением внутреннего состояния ядра надо представить ψ в виде

$$\psi = e^{i\mathbf{kr}}\Phi_i + \sum_f f_{fi}(\mathbf{n}', \mathbf{n})\Phi_f\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{152,6}$$

где суммирование производится по различным состояниям ядра; $f_{fi}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ и даст тогда искомую амплитуду рассеяния с заданным переходом ядра $i \to f$ как функцию от угла рассеяния (угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$). Сравнив (152,6) с (152,5), найдем, что

$$f_{fi}(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \int \Phi_f^* F \Phi_i \, d\tau, \tag{152,7}$$

где $d\tau = d^3R_1\, d^3R_2 \ldots$ — элемент конфигурационного пространства ядра. Снова подчеркнем, что эта формула применима лишь при сравнительно малой разности энергий состояний i и f.

Само решение (152,4) уравнения (152,3) находится описанным в § 131 способом [1]). Аналогично формуле (131,7) имеем

$$F(\mathbf{n}', \mathbf{n}; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots) = \frac{k}{2\pi i}\int [S(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots) - 1]\, e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho, \tag{152,8}$$

---

[1]) В § 131 было отмечено, что исходное выражение волновой функции (131,4) применимо лишь на расстояниях $z \ll ka^2$. Это обстоятельство не было существенно для дальнейшего вывода в § 131. Но при рассеянии на системе частиц (ядре) оно приводит к дополнительному ограничительному условию. Необходимо, чтобы выражение (131,4) было применимым во всем объеме рассеивающей системы, т. е. должно быть $R_0 \ll ka^2$, где R_0 — радиус ядра (a — радиус действия потенциалов U).

где введены обозначения

$$S(\rho,\ \mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \ldots) = \exp[2i\delta(\rho,\ \mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \ldots)],$$

$$\delta(\rho,\ \mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \ldots) = \sum_a \delta_a(\rho - \mathbf{R}_{a\perp}), \qquad (152,9)$$

$$\delta_a(\rho - \mathbf{R}_{a\perp}) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)\,dz.$$

Напомним, что ρ — проекция радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость xy, перпендикулярную к $\mathbf{k}$ ($\mathbf{R}_{a\perp}$ — такая же проекция радиуса-вектора $\mathbf{R}_a$); $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ — изменение импульса рассеиваемой частицы, причем в (152,8) входят лишь поперечные его компоненты. Функции δ_a определяют амплитуды упругого рассеяния частицы на отдельных свободных нуклонах согласно

$$f^{(a)} = \frac{k}{2\pi i}\int \{\exp[2i\delta_a(\rho)] - 1\}\,e^{-i\mathbf{q}\rho}\,d^2\rho. \qquad (152,10)$$

При $i = f$ находим из (152,7), (152,8) амплитуду упругого рассеяния на ядре:

$$f_{ii}(\mathbf{n}',\ \mathbf{n}) = \frac{k}{2\pi i}\int [\overline{S}(\rho) - 1]\,e^{-i\mathbf{q}\rho}\,d^2\rho, \qquad (152,11)$$

где черта означает усреднение по внутреннему состоянию ядра:

$$\overline{S}(\rho) = \int S(\rho,\ \mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \ldots)\,|\Phi_i(\mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2,\ \ldots)|^2\,d\tau. \qquad (152,12)$$

Эта формула обобщает прежнюю формулу (131,7).

Положив в (152,11) $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$ и воспользовавшись оптической теоремой (142,10), получим полное сечение рассеяния

$$\sigma_t = 2\int (1 - \operatorname{Re}\overline{S})\,d^2\rho. \qquad (152,13)$$

Интегральное сечение упругого рассеяния σ_e получается интегрированием $|f_{ii}|^2$ по направлениям $\mathbf{n}'$. При малых углах рассеяния θ имеем $q \approx k\theta$ и элемент телесных углов $do \approx d^2q/k^2$. Поэтому

$$\sigma_e = \int |f_{ii}|^2\,\frac{d^2q}{k^2}.$$

Представив $f_{ii}^* f_{ii}$ с f_{ii} из (152,11) в виде двойного интеграла (по $d^2\rho\,d^2\rho'$), интегрируем по d^2q с помощью формулы

$$\int e^{-i\mathbf{q}(\rho-\rho')}\,d^2q = (2\pi)^2\,\delta(\rho - \rho'),$$

после чего δ-функция устраняется интегрированием по $d^2\rho'$. В результате находим

$$\sigma_e = \int |\overline{S} - 1|^2\,d^2\rho. \qquad (152,14)$$

Наконец, полное сечение реакций

$$\sigma_r = \sigma_t - \sigma_e = \int (1 - |\overline{S}|^2)\, d^2\rho. \qquad (152,15)$$

Обратим внимание на соответствие выражений (152,13)—(152,15) с общими формулами (142,3)—(142,5). Переходя в последних от суммирования (по большим l) к интегрированию по $d^2\rho$ (с $\rho = l/k$) и заменив S_l на функцию $\overline{S}(\rho)$, мы получим (152,13)—(152,15).

Задачи

1. Выразить амплитуду упругого рассеяния быстрой частицы на дейтроне через амплитуды рассеяния на протоне и нейтроне (*R. J. Glauber*, 1955).

Решение. Согласно (152,11) амплитуда упругого рассеяния на дейтроне

$$f^{(d)}(\mathbf{q}) = \frac{k}{2\pi i}\int |\psi_d(\mathbf{R})|^2 \left\{ \exp\left[2i\delta_n\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{R}_\perp}{2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2i\delta_p\left(\boldsymbol{\rho} + \frac{\mathbf{R}_\perp}{2}\right)\right] - 1\right\} e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, d^3R\, d^2\rho. \qquad (1)$$

Здесь $\psi_d(\mathbf{R})$ — волновая функция относительного движения нейтрона (n) и протона (p) в дейтроне; $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_p$, а $\mathbf{R}_\perp$ — проекция $\mathbf{R}$ на плоскость, перпендикулярную к волновому вектору падающей частицы $\mathbf{k}$. Представим разность в фигурных скобках в (1) в виде

$$\exp(2i\delta_n + 2i\delta_p) - 1 = \left(e^{2i\delta_n} - 1\right) + \left(e^{2i\delta_p} - 1\right) + \left(e^{2i\delta_n} - 1\right)\left(e^{2i\delta_p} - 1\right).$$

После этого интегралы преобразуются с учетом определения амплитуд рассеяния на нейтроне ($f^{(n)}$) и протоне ($f^{(p)}$) согласно (152,10) и обратных формул

$$\exp[2i\rho_a(\boldsymbol{\rho})] - 1 = \frac{2\pi i}{k}\int f^{(a)}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}\, \frac{d^2q}{(2\pi)^2}.$$

В результате находим

$$f^{(d)}(\mathbf{q}) = f^{(n)}(\mathbf{q})\, F(\mathbf{q}) + f^{(p)}(\mathbf{q})\, F(-\mathbf{q}) -$$
$$- \frac{1}{2\pi i k}\int F(2\mathbf{q}')\, f^{(n)}\left(\frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{q}'\right) f^{(p)}\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{q}'\right) d^2q', \qquad (2)$$

где

$$F(\mathbf{q}) = \int |\psi_d(\mathbf{R})|^2\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}/2}\, d^3R$$

— формфактор дейтрона.

Положив в (2) $\mathbf{q} = 0$ (причем $F(0) = 1$) и воспользовавшись оптической теоремой (142,10), найдем полное сечение рассеяния на дейтроне:

$$\sigma_t^{(d)} = \sigma_t^{(n)} + \sigma_t^{(p)} + \frac{2}{k^2}\,\mathrm{Re}\int F(2\mathbf{q})\, f^{(n)}(\mathbf{q})\, f^{(p)}(-\mathbf{q})\, d^2q. \qquad (3)$$

2. Определить сечение распада быстрого дейтрона на независимые нейтрон и протон при рассеянии на тяжелом поглощающем ядре; радиус ядра R_0 велик по сравнению с длиной волны дейтрона ($kR_0 \gg 1$, $\hbar\mathbf{k}$ — импульс дейтрона) и по сравнению с радиусом дейтрона (*Е. Л. Фейнберг*, 1954; *R. J. Glauber*, 1955; *А. И. Ахиезер* и *А. Г. Ситенко*, 1955).

Решение. По отношению к падающей дейтронной плоской волне большое ($kR_0 \gg 1$) поглощающее ядро играет роль непрозрачного экрана, на котором волна дифрагирует. Волновая функция падающих дейтронов: $e^{i\mathbf{kr}}\psi_d(R)$, где $\psi_d(R)$ — внутренняя волновая функция дейтрона ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_p$ — радиус-вектор между нейтроном и протоном в дейтроне, $\mathbf{r} = (\mathbf{R}_n + \mathbf{R}_p)/2$ — радиус-вектор их центра инерции). Наличие поглощающего ядра приводит к «выеданию» части этой функции, отвечающей поперечным координатам нейтрона и протона ($\boldsymbol{\rho}_n$ и $\boldsymbol{\rho}_p$), попадающим в область «тени» ядра, т. е. внутрь круга радиуса R_0. Другими словами, волновая функция становится равной

$$\psi = e^{i\mathbf{kr}} S(\boldsymbol{\rho}_n, \boldsymbol{\rho}_p)\, \psi_d(R),$$

где $S = 1$ при $\rho_n, \rho_p \geqslant R_0$ и $S = 0$, если хотя бы одно из ρ_n или ρ_p меньше R_0 [1]). Эта функция (без множителя ψ_d) отвечает выражению падающей волны в виде (131,5) (в ней пренебрежено дифракционным искривлением лучей); поэтому и множитель S имеет тот же смысл, что и в § 131, 152.

Аналогично (152,13), (152,14) полное сечение рассеяния дейтрона σ_t (включающее все неупругие процессы) и сечение упругого рассеяния σ_e даются формулами

$$\sigma_t = 2\int (1 - \overline{S})\, d^2\rho, \qquad \sigma_e = \int (\overline{S} - 1)^2\, d^2\rho,$$

где $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_n + \boldsymbol{\rho}_p)/2$ и учтена вещественность S; усреднение S производится по основному состоянию дейтрона:

$$\overline{S}(\rho) = \int S\psi_d^2\, d^3R.$$

В качестве ψ_d достаточно взять функцию

$$\psi_d = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, \frac{e^{-\varkappa R}}{R},$$

справедливую на расстояниях R вне радиуса действия ядерных сил, действующих между нейтроном и протоном (ср. (133,14); $\varkappa = \sqrt{m|\varepsilon|}/\hbar$, где $|\varepsilon|$ — энергия связи дейтрона; m — масса нуклона). По определению S, разность $1 - S$ отлична от нуля, если один или оба из двух нуклонов попадают внутрь круга радиуса R_0 и поглощаются ядром; поэтому

$$\sigma_{\text{захв}} = \int (1 - \overline{S})\, d^2\rho = \sigma_t/2 \qquad (1)$$

есть сечение захвата одного или обоих нуклонов. С другой стороны, $\sigma_t = \sigma_{\text{захв}} + \sigma_e + \sigma_{\text{расп}}$, где $\sigma_{\text{расп}}$ — интересующее нас сечение «дифракционного» распада дейтрона. Отсюда

$$\sigma_{\text{расп}} = \frac{1}{2}\sigma_t - \sigma_e = \int \overline{S}(1 - \overline{S})\, d^2\rho. \qquad (2)$$

При $R_0\varkappa \gg 1$ в интеграле (2) существенны малые ($\sim 1/\varkappa$) расстояния от края ядра; тогда интегрирование вдоль края дает множитель $2\pi R_0$, а интегрирование в перпендикулярном направлении можно производить так, как если бы область тени была ограничена прямой линией. Выбрав последнюю в качестве оси y (а ось x — в направлении наружу от тени), имеем

$$\sigma_{\text{расп}} = 2\pi R_0 \int_0^\infty \overline{S}(x)\,[1 - \overline{S}(x)]\, dx,$$

[1]) Кулоновым взаимодействием дейтрона с ядром пренебрегаем.

причем интеграл

$$\overline{S}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{-2x}^{2x}\psi_d^2(R)\,dX\,dY\,dZ,\qquad R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

берется по области X_n, $X_p \geqslant 0$ при заданном значении $x=(X_n+X_p)/2$ или, что то же, по области $|X|=|X_n-X_p|\leqslant 2x$. Интеграл преобразуется переходом к переменным X, R и полярному углу в плоскости YZ (причем $dY\,dZ \to 2\pi R\,dR$) и приводится к виду

$$\overline{S}(x)=1-e^{-4\varkappa x}+4\varkappa x\int_{4\varkappa x}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi. \tag{3}$$

Интеграл (2) с этой функцией $\overline{S}(x)$ вычисляется путем повторных интегрирований по частям с использованием формулы

$$\int_0^{\infty}(e^{-\xi}-e^{-2\xi})\frac{d\xi}{\xi}=\ln 2.$$

В результате получается [1])

$$\sigma_{\text{расп}}=\frac{\pi}{3\varkappa}R_0\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right).$$

[1]) При этом же условии $\varkappa R_0 \gg 1$, сечение захвата

$$\sigma_{\text{захв}}=\pi R_0^2+\frac{\pi R_0}{4\varkappa}$$

(интеграл (1) по области $\rho > R_0$ вычисляется с помощью (3), и интеграл по области $\rho < R_0$ дает πR_0^2). Это сечение включает в себя как захват дейтрона в целом, так и захват лишь одного из нуклонов с освобождением другого (*реакция срыва*). Сечение последней реакции вычисляется как (усредненная по ψ_d^2) прицельная площадь, отвечающая попаданию лишь одного из двух нуклонов в область тени, и равно

$$\sigma_{\text{захв}\,n}=\sigma_{\text{захв}\,p}=\pi R_0/4\varkappa$$

(*R. Serber*, 1947).