С помощью рекуррентных соотношений

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x), \quad 2K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)$$

легко найти для производной функции Эйри выражение

$$\Phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{b,7}$$

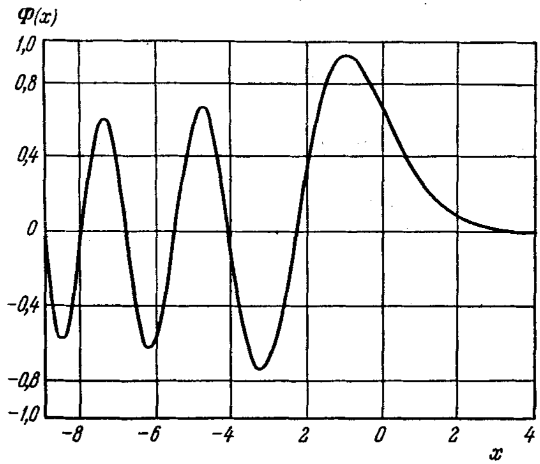

Рис. 55

При $x = 0$

$$\Phi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}629, \qquad \Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\sqrt{\pi}} = -0{,}459. \tag{b,8}$$

На рис. 55 дан график функции Эйри.

§ c. Полиномы Лежандра [1]

Полиномы Лежандра $P_l(\cos\theta)$ определяются формулой

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d\cos\theta)^l} (\cos^2\theta - 1)^l. \tag{c,1}$$

[1]) В математической литературе есть много хороших изложений теории шаровых функций. Здесь мы приводим для справок лишь некоторые основные соотношения, совершенно не занимаясь систематическим изложением теории этих функций.

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l}{d\theta}\right)+l(l+1)P_l=0. \qquad (c,2)$$

Присоединенные полиномы Лежандра определяются формулой

$$P_l^m(\cos\theta)=\sin^m\theta\frac{d^mP_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}=\frac{1}{2^l l!}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}(\cos^2\theta-1)^l \qquad (c,3)$$

или эквивалентной ей

$$P_l^m(\cos\theta)=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!\,2^l l!}\sin^{-m}\theta\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}(\cos^2\theta-1)^l, \qquad (c,4)$$

причем $m=0, 1, \ldots, l$. Присоединенные полиномы удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m=0. \qquad (c,5)$$

Нормировочный интеграл полиномов Лежандра $\int_{-1}^{1}[P_l(\mu)]^2\,d\mu$ ($\mu=\cos\theta$) вычисляется подстановкой в него выражений (c,1) и l-кратным интегрированием по частям, после чего он оказывается равным

$$\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(\mu^2-1)^l\frac{d^{2l}}{d\mu^{2l}}(\mu^2-1)^l\,d\mu=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^l\,d\mu.$$

Подстановкой $u=(1-\mu)/2$ этот интеграл приводит к B-интегралу Эйлера и дает

$$\int_{-1}^{1}[P_l(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2l+1}. \qquad (c,6)$$

Аналогичным образом легко убедиться в том, что функции $P_l(\mu)$ с различными l взаимно ортогональны:

$$\int_{-1}^{1}P_l(\mu)P_{l'}(\mu)\,d\mu=0, \qquad l\neq l'. \qquad (c,7)$$

Вычисление нормировочного интеграла для присоединенных полиномов легко произвести аналогичным образом, написав $[P_l^m(\mu)]^2$ в виде произведения выражений (c, 3) и (c, 4) и интегрируя $l-m$ раз по частям; в результате получается

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \qquad (c,8)$$

Легко также убедиться в том, что функции P_l^m с различными l (и одинаковыми m) взаимно ортогональны:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu)\, d\mu = 0, \qquad l \neq l'. \tag{c,9}$$

Вычисление интегралов от произведений трех полиномов Лежандра рассматривалось в § 107.

Для полиномов Лежандра имеет место следующая *теорема сложения*. Пусть γ — угол между двумя направлениями, определяемыми сферическими углами θ, φ и θ', φ': $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$. Тогда

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') + \sum_{m=1}^{l} 2\frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'). \tag{c,10}$$

Эта теорема может быть также записана в терминах шаровых функций (определенных согласно (28,7)) в виде

$$P_l(\mathbf{nn}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}). \tag{c,11}$$

Здесь $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ — два единичных вектора, а $Y_{lm}(\mathbf{n})$ означает сферическую функцию от полярного угла и азимута направления $\mathbf{n}$ относительно фиксированной системы координат.

Умножим равенство (с,10) на $P_{l'}(\cos\theta)$ и проинтегрируем его по $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Интегрирование по $d\varphi$ обращает в нуль все члены в правой стороне равенства, содержащие множители $\cos m(\varphi-\varphi')$; с учетом (с,6), (с,7) получим

$$\int P_l(\cos\gamma) P_{l'}(\cos\theta)\, do = \delta_{ll'}\frac{4\pi}{2l+1}P_l(\cos\theta').$$

Этот результат можно записать в симметричном виде

$$\int P_l(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) P_{l'}(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_3)\, do_1 = \delta_{ll'}\frac{4\pi}{2l+1}P_l(\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3), \tag{c,12}$$

где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — три единичных вектора, а интегрирование производится по направлениям одного из них — $\mathbf{n}_1$. Наконец, приведем выражения нескольких первых нормированных сферических функций Y_{lm}:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}, \qquad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1-3\cos^2\theta),$$

$$Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}, \quad Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},$$

$$Y_{30} = -i\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cos\theta\,(5\cos^2\theta - 3),$$

$$Y_{3,\pm1} = \pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\,e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{3,\pm2} = -i\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cos\theta\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},$$

$$Y_{3,\pm3} = \pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta\cdot e^{\pm 3i\varphi}.$$

§ d. Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F(\alpha,\ \gamma,\ z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \tag{d,1}$$

сходящимся при всех конечных z; параметр α произволен, а параметр γ предполагается не равным нулю или целому отрицательному числу. Если α есть целое отрицательное число (или нуль), то $F(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному степени $|\alpha|$.

Функция $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяет уравнению

$$zu'' + (\gamma - z)\,u' - \alpha u = 0, \tag{d,2}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой[1]. Подстановкой $u = z^{1-\gamma}u_1$ это уравнение преобразуется в уравнение того же вида

$$zu_1'' + (2 - \gamma - z)\,u_1' - (\alpha - \gamma + 1)\,u_1 = 0. \tag{d,3}$$

Отсюда видно, что при нецелом γ уравнение (d,2) имеет также частный интеграл $z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z)$, линейно независимый от (d,1), так что общее решение уравнения (d,2) имеет вид

$$u = c_1F(\alpha, \gamma, z) + c_2z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z). \tag{d,4}$$

Второй член, в противоположность первому, имеет при $z = 0$ особую точку.

Уравнение (d,2) относится к типу Лапласа, и его решения могут быть представлены в виде контурных интегралов. Следуя общему методу, составляем функции

$$P(t) = \gamma t - \alpha, \qquad Q(t) = t(t-1), \qquad Z(t) = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1},$$

[1] Уравнение (d, 2) с целым отрицательным значением γ не нуждается в особом рассмотрении, так как может быть сведено (преобразованием к уравнению (d, 3)) к случаю целых положительных γ.