$$Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}, \qquad Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},$$

$$Y_{30} = -i\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cos\theta\,(5\cos^2\theta - 3),$$

$$Y_{3,\pm1} = \pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\,e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{3,\pm2} = -i\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cos\theta\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},$$

$$Y_{3,\pm3} = \pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta\cdot e^{\pm 3i\varphi}.$$

§ d. Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F(\alpha,\ \gamma,\ z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \tag{d,1}$$

сходящимся при всех конечных z; параметр α произволен, а параметр γ предполагается не равным нулю или целому отрицательному числу. Если α есть целое отрицательное число (или нуль), то $F(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному степени $|\alpha|$.

Функция $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяет уравнению

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0, \tag{d,2}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой [1]). Подстановкой $u = z^{1-\gamma}u_1$ это уравнение преобразуется в уравнение того же вида

$$zu_1'' + (2 - \gamma - z)u_1' - (\alpha - \gamma + 1)u_1 = 0. \tag{d,3}$$

Отсюда видно, что при нецелом γ уравнение (d,2) имеет также частный интеграл $z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z)$, линейно независимый от (d,1), так что общее решение уравнения (d,2) имеет вид

$$u = c_1F(\alpha, \gamma, z) + c_2z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z). \tag{d,4}$$

Второй член, в противоположность первому, имеет при $z = 0$ особую точку.

Уравнение (d,2) относится к типу Лапласа, и его решения могут быть представлены в виде контурных интегралов. Следуя общему методу, составляем функции

$$P(t) = \gamma t - \alpha, \qquad Q(t) = t(t-1), \qquad Z(t) = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1},$$

1) Уравнение (d, 2) с целым отрицательным значением γ не нуждается в особом рассмотрении, так как может быть сведено (преобразованием к уравнению (d, 3)) к случаю целых положительных γ.

так что

$$u = \int e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}\, dt. \tag{d,5}$$

Путь интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы после его прохождения функция $V(t) = e^{tz} t^{\alpha} (t-1)^{\gamma-\alpha}$ возвращалась к исходному значению. Применяя тот же метод к уравнению (d,3), можно получить для u контурный интеграл другого вида

$$u = z^{1-\gamma} \int e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha}\, dt.$$

В этом интеграле удобно сделать подстановку $tz \to t$, приводящую его к виду

$$u(z) = \int e^{t} (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma}\, dt, \tag{d,6}$$

причем соответствующая функция $V(t) = e^{t} t^{\alpha-\gamma+1} (t-z)^{1-\alpha}$.

Подынтегральное выражение в (d,6) имеет, вообще говоря, две особые точки — при $t = z$ и при $t = 0$. Выберем контур интегрирования C, приходящий из бесконечности ($\mathrm{Re}\, t \to -\infty$), обходящий обе особые точки в положительном направлении и уходящий снова на бесконечность (рис. 56). Этот контур удовлетворяет требуемым условиям, так как на его концах функция $V(t)$ обращается в нуль. Интеграл (d,6), взятый по контуру C, не имеет особой точки при $z = 0$; поэтому он должен совпадать, с точностью до постоянного множителя, с не имеющей особенностей функцией $F(\alpha, \gamma, z)$. При $z = 0$ обе особые точки подынтегрального выражения совпадают; согласно известной формуле теории Г-функций

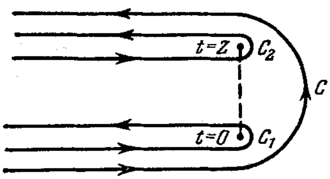

Рис. 56

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} e^{t} t^{-\gamma}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}. \tag{d,7}$$

Поскольку $F(\alpha, \gamma, 0) = 1$, то очевидно, что

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int\limits_{C} e^{t} (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma}\, dt. \tag{d,8}$$

В (d,5) подынтегральное выражение имеет особые точки $t = 0$ и $t = 1$. Если $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, а γ — не целое положительное число, то в качестве пути интегрирования можно выбрать контур C', выходящий из точки $t = 1$, обходящий в положительном направлении точку $t = 0$ и возвращающийся в $t = 1$ (рис. 57); при $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ в результате обхода вдоль такого контура функция $V(t)$ возвращается к исходному значению нуль[1]). Определенный таким образом интеграл тоже не имеет особенности при $z = 0$ и связан с $F(\alpha, \gamma, z)$ посредством

$$F(\alpha, \gamma, z) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\oint\limits_{C'} e^{tz}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt. \quad \text{(d,9)}$$

По поводу интегралов (d,8), (d,9) надо сделать следующее замечание. При нецелых α и γ подынтегральные выражения в них являются неоднозначными функциями. Их значения в каждой точке предполагаются выбранными условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

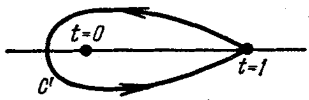

Рис. 57

Отметим полезное соотношение

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z), \quad \text{(d,10)}$$

которое получается непосредственно, если сделать в интеграле (d,8) подстановку $t \to t + z$.

Мы уже упоминали, что если $\alpha = -n$, где n — целое положительное число, то функция $F(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. Для этих полиномов можно получить короткую формулу. Делая в интеграле (d,9) подстановку $t \to 1 - (t/z)$ и применяя к получившемуся интегралу формулу Коши, найдем следующую формулу

$$F(-n, \gamma, z) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^{1-\gamma}e^z \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^{\gamma+n-1}). \quad \text{(d,11)}$$

Если к тому же $\gamma = m$, где m — целое положительное число, то имеет место также и формула

$$F(-n, m, z) = \frac{(-1)^{m-1}}{m(m+1)\dots(m+n-1)} e^z \frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}(e^{-z}z^n). \quad \text{(d,12)}$$

Эта формула получается применением формулы Коши к интегралу, получающемуся из (d,8) подстановкой $t \to z - t$.

Полиномы $F(-n, m, z)$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ совпадают, с точностью до постоянного множителя, с *обобщенными полиномами Лагерра*

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(-(n-m), m+1, z) =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} e^z \frac{d^n}{dz^n} e^{-z}z^{n-m} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} e^z z^{-m} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} e^{-z}z^n. \quad \text{(d,13)}$$

[1]) Если γ — целое положительное число, то в качестве C' можно выбрать любой контур, обходящий обе точки $t = 0$ и $t = 1$.

Полиномы L_n^m при $m = 0$ обозначают, как $L_n(z)$, и называют просто *полиномами Лагерра*; согласно (d,13) имеем

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n).$$

Интегральное представление (d,8) удобно для получения асимптотического разложения вырожденной гипергеометрической функции при больших z. Деформируем контур так, что он превращается в два контура C_1 и C_2 (рис. 56), обходящих соответственно точки $t = 0$ и $t = z$; нижнюю ветвь пути C_2 и верхнюю ветвь C_1 надо представлять себе смыкающимися на бесконечности. Имея в виду получить разложение по обратным степеням z, выносим в подынтегральном выражении $(-z)^{-\alpha}$ за скобку. В интеграле по контуру C_2 делаем подстановку $t \to t + z$; тем самым мы преобразуем контур C_2 в контур C_1. В результате представляем формулу (d,8) в виде

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z), \qquad \text{(d,14)}$$

где

$$G(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i} \int_{C_1} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{-\alpha} t^{\beta-1} e^t \, dt. \qquad \text{(d,15)}$$

При возведении в степень в формуле (d,14) $-z$ и z должны браться с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента. Наконец, разлагая в подынтегральном выражении $(1 + t/z)^{-\alpha}$ по степеням t/z и применяя формулу (d,7), получим в результате для $G(\alpha, \beta, z)$ асимптотический ряд

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,z^2} + \ldots \qquad \text{(d,16)}$$

Формулами (d,14) и (d,16) определяется асимптотическое разложение функции $F(\alpha, \gamma, z)$.

При целом положительном γ второй член в общем решении (d,4) уравнения (d,2) либо совпадает с первым (если $\gamma = 1$), либо теряет вовсе смысл (если $\gamma > 1$). В качестве системы двух линейно независимых решений можно в этом случае выбрать два слагаемых в формуле (d,14), т. е. интегралы (d,8), взятые по контурам C_1 и C_2 (эти контуры, как и контур C, удовлетворяют требуемым условиям, так что интегралы вдоль них — тоже решения уравнения (d,2)). Асимптотический вид этих решений определяется уже полученными формулами; остается найти их разложение по восходящим степеням z. Для этого исходим из равенства (d,14) и аналогичного равенства для функции $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$.

Из этих двух равенств выражаем $G(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ -z)$ через $F(\alpha,\gamma,z)$ и $F(\alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)$, после чего полагаем $\gamma = p+\varepsilon$ (p — целое положительное число) и переходим к пределу $\varepsilon \to 0$, раскрывая неопределенности по правилу Лопиталя. В результате довольно длинного вычисления получается следующее разложение:

$$G(\alpha,\ \alpha-p+1,\ -z) = -\frac{\sin \pi\alpha\cdot\Gamma(p-\alpha)}{\pi\Gamma(p)} z^{\alpha} \left\{ \ln z\cdot F(\alpha,\ p,\ z) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha+s)\,[\psi(\alpha+s)-\psi(p+s)-\psi(s+1)]}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(s+p)\,\Gamma(s+1)} z^{s} + \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^{s+1} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\alpha-s)\,\Gamma(p)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(p-s)} z^{-s} \right\}, \qquad (d,17)$$

где ψ обозначает логарифмическую производную от Г-функции: $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$.

§ е. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическая функция определяется внутри круга $|z| < 1$ рядом

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad (e,1)$$

а при $|z| > 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда (см. (е,6)). Гипергеометрическая функция является одним из частных интегралов дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma-(\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0. \qquad (e,2)$$

Параметры α и β произвольны, а $\gamma \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots$ Функция $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$, очевидно, симметрична по параметрам α и β [1]. Второе независимое решение уравнения (е,2) есть

$$z^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z);$$

оно имеет особую точку при $z = 0$.

Мы приведем здесь для справочных целей ряд соотношений, которым удовлетворяет гипергеометрическая функция.

[1]) Вырожденная гипергеометрическая функция получается из $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ предельным переходом $F(\alpha,\gamma,z) = \lim F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{z}{\beta}\right)$ при $\beta \to \infty$.

В литературе используется также обозначение ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ для гипергеометрической и ${}_1F_1(\alpha,\gamma,z)$ для вырожденной гипергеометрической функций. Индексы слева и справа от буквы F указывают число параметров, фигурирующих соответственно в числителях и знаменателях членов ряда.