Из этих двух равенств выражаем $G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z)$ через $F(\alpha, \gamma, z)$ и $F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$, после чего полагаем $\gamma = p+\varepsilon$ (p — целое положительное число) и переходим к пределу $\varepsilon \to 0$, раскрывая неопределенности по правилу Лопиталя. В результате довольно длинного вычисления получается следующее разложение:

$$G(\alpha, \alpha-p+1, -z) = -\frac{\sin \pi\alpha \cdot \Gamma(p-\alpha)}{\pi\Gamma(p)} z^{\alpha} \left\{ \ln z \cdot F(\alpha, p, z) + \right.$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha+s)\,[\psi(\alpha+s)-\psi(p+s)-\psi(s+1)]}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(s+p)\,\Gamma(s+1)} z^{s} +$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^{s+1} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\alpha-s)\,\Gamma(p)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(p-s)} z^{-s} \right\}, \qquad \text{(d,17)}$$

где ψ обозначает логарифмическую производную от Г-функции: $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$.

§ е. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическая функция определяется внутри круга $|z| < 1$ рядом

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad \text{(e,1)}$$

а при $|z| > 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда (см. (е,6)). Гипергеометрическая функция является одним из частных интегралов дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0. \qquad \text{(e,2)}$$

Параметры α и β произвольны, а $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, очевидно, симметрична по параметрам α и β [1].

Второе независимое решение уравнения (е,2) есть

$$z^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z);$$

оно имеет особую точку при $z = 0$.

Мы приведем здесь для справочных целей ряд соотношений, которым удовлетворяет гипергеометрическая функция.

---

[1]) Вырожденная гипергеометрическая функция получается из $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ предельным переходом $F(\alpha, \gamma, z) = \lim F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right)$ при $\beta \to \infty$.

В литературе используется также обозначение ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ для гипергеометрической и ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ для вырожденной гипергеометрической функций. Индексы слева и справа от буквы F указывают число параметров, фигурирующих соответственно в числителях и знаменателях членов ряда.

Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ может быть представлена при всех z, если $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0$, в виде интеграла

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\oint_{C'}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}\,dt, \qquad (\text{e},3)$$

взятого по контуру C', изображенному на рис. 57. В том, что этот интеграл действительно удовлетворяет уравнению (е,2), легко убедиться непосредственной подстановкой; постоянный множитель подобран так, чтобы при $z=0$ получилась единица.

Подстановка

$$u=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}u_1$$

в уравнении (е,2) приводит к уравнению того же вида с параметрами $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$, γ соответственно вместо α, β, γ. Отсюда следует равенство

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z) \qquad (\text{e},4)$$

(обе стороны равенства удовлетворяют одному и тому же уравнению и их значения при $z=0$ совпадают).

Подстановка $t\to t/(1-z+zt)$ в интеграле (е,3) приводит к следующему соотношению между гипергеометрическими функциями от переменных z и $z/(z-1)$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right). \qquad (\text{e},5)$$

Значение многозначного выражения $(1-z)^{-\alpha}$ в этой формуле (и аналогичных выражений во всех следующих ниже формулах) определяется условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

Далее, приведем без вывода важную формулу, связывающую гипергеометрические функции от переменных z и $1/z$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{z}\right). \qquad (\text{e},6)$$

Эта формула выражает $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в виде ряда, сходящегося при $|z|>1$, т. е. представляет собой аналитическое продолжение исходного ряда (е,1).

Формула

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-z) \qquad (\text{e},7)$$

связывает гипергеометрические функции от z и $1-z$ (мы также приводим ее без вывода). Комбинируя (е,7) с (е,6), получим соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-z}\right), \quad (\text{e},8)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times \\ \times z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \\ \times (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} z^{\beta-\gamma} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{z-1}{z}\right). \quad (\text{e},9)$$

Каждый из членов сумм в правых сторонах равенств (е,6)—(е,9) представляет сам по себе решение гипергеометрического уравнения.

Если α (или β) есть целое отрицательное число (или нуль), $\alpha = -n$, то гипергеометрическая функция сводится к полиному n-й степени и может быть представлена в виде

$$F(-n, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}\right]. \quad (\text{e},10)$$

Эти полиномы совпадают, с точностью до постоянного множителя с *полиномами Якоби*, определяемыми как

$$P_n^{(a,b)}(z) = \\ = \frac{(a+1)(\alpha+2)\ldots(a+n)}{n!} F\left(-n, a+b+n+1, a+1, \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b} \frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{a+n}(1+z)^{b+n}\right]. \quad (\text{e},11)$$

При $a = b = 0$ полиномы Якоби совпадают с полиномами Лежандра. При $n = 0$ $P_0^{(a,b)} = 1$.

§ f. Вычисление интегралов с вырожденными гипергеометрическими функциями

Рассмотрим интеграл вида

$$J_{\alpha\gamma}^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\nu} F(\alpha, \gamma, kz)\, dz. \quad (\text{f},1)$$

Предполагается, что он сходится. Для этого должно быть $\operatorname{Re}\nu > -1$ и $\operatorname{Re}\lambda > |\operatorname{Re} k|$; если α есть целое отрицательное число,