связывает гипергеометрические функции от z и $1-z$ (мы также приводим ее без вывода). Комбинируя (e,7) с (e,6), получим соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-z}\right), \quad (e,8)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times \\ \times z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \\ \times (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} z^{\beta-\gamma} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{z-1}{z}\right). \quad (e,9)$$

Каждый из членов сумм в правых сторонах равенств (e,6)—(e,9) представляет сам по себе решение гипергеометрического уравнения.

Если α (или β) есть целое отрицательное число (или нуль), $\alpha = -n$, то гипергеометрическая функция сводится к полиному n-й степени и может быть представлена в виде

$$F(-n, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}]. \quad (e,10)$$

Эти полиномы совпадают, с точностью до постоянного множителя с *полиномами Якоби*, определяемыми как

$$P_n^{(a,b)}(z) = \\ = \frac{(a+1)(\alpha+2)\ldots(a+n)}{n!} F\left(-n, a+b+n+1, a+1, \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b} \frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{a+n}(1+z)^{b+n}]. \quad (e,11)$$

При $a = b = 0$ полиномы Якоби совпадают с полиномами Лежандра. При $n = 0$ $P_0^{(a,b)} = 1$.

§ f. Вычисление интегралов с вырожденными гипергеометрическими функциями

Рассмотрим интеграл вида

$$J_{\alpha\gamma}^{\nu} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} z^\nu F(\alpha, \gamma, kz)\, dz. \quad (f,1)$$

Предполагается, что он сходится. Для этого должно быть $\operatorname{Re}\nu > -1$ и $\operatorname{Re}\lambda > |\operatorname{Re} k|$; если α есть целое отрицательное число, то вместо второго условия достаточно потребовать, чтобы было $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Воспользовавшись для $F(\alpha, \gamma, kz)$ интегральным представлением (d,9) и произведя интегрирование по dz под знаком контурного интегрирования, получим

$$J^{\nu}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\lambda^{-\nu-1}\Gamma(\nu+1)\times$$
$$\times\oint\limits_{C'}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{k}{\lambda}t\right)^{-\nu-1}dt.$$

Учитывая (e,3), находим окончательно

$$J^{\nu}_{\alpha\gamma} = \Gamma(\nu+1)\lambda^{-\nu-1}F\left(\alpha,\ \nu+1,\ \gamma,\ \frac{k}{\lambda}\right). \qquad (f,2)$$

В случаях, когда функция $F(\alpha, \nu+1, \gamma, k/\lambda)$ сводится к полиномам, получаем соответственно и для интеграла $J^{\nu}_{\alpha\gamma}$ выражения через элементарные функции:

$$J^{\gamma+n-1}_{\alpha\gamma} = (-1)^n\Gamma(\gamma)\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}], \qquad (f,3)$$

$$J^{\nu}_{-n\gamma} = (-1)^n\frac{\Gamma(\nu+1)(\lambda-k)^{\gamma+n-\nu-1}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda^{-\nu-1}(\lambda-k)^{\nu-\gamma+1}], \qquad (f,4)$$

$$J^{n}_{\alpha m} = \frac{(-1)^{m-n}}{k^{m-1}(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-1-\alpha)}\times$$
$$\times\left\{-(m-1)!\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda^{\alpha-1}(\lambda-k)^{m-\alpha-1}]+\right.$$
$$+n!(m-n-1)\ldots(m-1)\lambda^{\alpha-n-1}(\lambda-k)^{-1+m-n-\alpha}\times$$
$$\left.\times\frac{d^{m-n-2}}{d\lambda^{m-n-2}}[\lambda^{m-\alpha-1}(\lambda-k)^{\alpha-1}]\right\} \qquad (f,5)$$

(m, n — целые числа, $0 \leqslant n \leqslant m-2$).

Далее, вычислим интеграл

$$J_{\nu} = \int\limits_0^{\infty} e^{-kz}z^{\nu-1}[F(-n,\ \gamma,\ kz)]^2\,dz \qquad (f,6)$$

(n — целое положительное, $\operatorname{Re}\nu > 0$). Для вычисления исходим из более общего интеграла, содержащего в подынтегральном выражении $e^{-\lambda z}$ вместо e^{-kz}. Одну из функций $F(-n, \gamma, kz)$ пишем в виде интеграла (d,9), после чего интегрирование по dz с помощью формулы (f,3) дает

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\nu-1} [F(-n, \gamma, kz)]^2 dz = -\frac{1}{2\pi i}(-1)^n \frac{\Gamma(1+n)\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\nu)}{\Gamma^2(\gamma+n)} \times$$
$$\times \oint_{C'} (\lambda - kt - k)^{\gamma+n-\nu}(-t)^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1} \times$$
$$\times \frac{d^n}{d\lambda^n}[(\lambda - kt)^{-\nu}(\lambda - kt - k)^{\nu-\gamma}]\, dt.$$

Производную n-го порядка по λ можно, очевидно, заменить, выразив через производную того же порядка по t; сделав это, полагаем $\lambda = k$, возвращаясь, таким образом, к интегралу J_ν:

$$J_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu)\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma^2(\gamma+n)k^\nu} \times$$
$$\times \oint_{C'} (-t)^{\gamma-\nu-1}(1-t)^{\gamma+n-1}\frac{d^n}{dt^n}[(1-t)^{-\nu}(-t)^{\nu-\gamma}]\, dt.$$

Посредством n-кратного интегрирования по частям переносим операцию $(d/dt)^n$ на выражение $(-t)^{\gamma-\nu-1}(1-t)^{\gamma+n-1}$ и раскрываем производную по формуле Лейбница. В результате получим сумму интегралов, каждый из которых сводится к известному интегралу Эйлера. Окончательно получается следующее выражение для искомого интеграла:

$$J_\nu = \frac{\Gamma(\nu)\, n!}{k^\nu \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \times$$
$$\times \left\{1 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s)\ldots(\gamma-\nu+s)}{[(s+1)!]^2\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+s)}\right\}. \tag{f,7}$$

Легко видеть, что между интегралами J_ν имеет место следующее соотношение (p — целое число)

$$J_{\gamma+p} = \frac{(\gamma-p-1)(\gamma-p)\ldots(\gamma+p-1)}{k^{2p+1}} J_{\gamma-1-p}. \tag{f,8}$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$J = \int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(\alpha, \gamma, kz) F(\alpha', \gamma, k'z)\, dz. \tag{f,9}$$

Представляем функцию $F(\alpha', \gamma, k'z)$ в виде интеграла (d,9) и после интегрирования по dz с помощью формулы (f,3) (с $n = 0$) находим

$$J = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha')\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha')}\oint_{C'}(-t)^{\alpha'-1}(1-t)^{\gamma-\alpha'-1}(\lambda-k't)^{\alpha-\gamma}\times$$
$$\times(\lambda-k't-k)^{-\alpha}\,dt.$$

Подстановкой $t \to \lambda t/(k't+\lambda-k')$ этот интеграл приводится к виду (e,3), давая в результате

$$J = \Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}(\lambda-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha, \alpha', \gamma, \frac{kk'}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right). \tag{f,10}$$

Если α (или α') есть целое отрицательное число $\alpha = -n$, то с помощью соотношения (e,7) это выражение может быть переписано в виде

$$J = \frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\alpha')}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha')}\lambda^{-n+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^n(\lambda-k')^{-\alpha'}\times$$
$$\times F\left(-n, \alpha', -n+\alpha'+1-\gamma, \frac{\lambda(\lambda-k-k')}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right). \tag{f,11}$$

Наконец, рассмотрим интегралы вида

$$J_\gamma^{sp}(\alpha, \alpha') = \int_0^\infty e^{-\frac{k+k'}{2}z}z^{\gamma-1+s}F(\alpha, \gamma, kz)F(\alpha', \gamma-p, k'z)\,dz. \tag{f,12}$$

Значения параметров предполагаются такими, что интеграл сходится абсолютно; s, p — целые положительные числа. Простейший из этих интегралов $J_\gamma^{00}(\alpha, \alpha')$ равен, согласно (f,10),

$$J_\gamma^{00}(\alpha, \alpha') = 2^\gamma\Gamma(\gamma)(k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma}(k'-k)^{-\alpha}\times$$
$$\times(k-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha, \alpha', \gamma, -\frac{4kk'}{(k'-k)^2}\right), \tag{f,13}$$

а если α (или α') — целое отрицательное число, $\alpha = -n$, то, согласно (f,11), можно также написать

$$J_\gamma^{00}(-n, \alpha') = 2^\gamma\frac{\Gamma(\gamma)(\gamma-\alpha')(\gamma-\alpha'+1)\ldots(\gamma-\alpha'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\times$$
$$\times(-1)^n(k+k')^{-n+\alpha'-\gamma}(k-k')^{n-\alpha'}\times$$
$$\times F\left[-n, \alpha', \alpha'+1-n-\gamma, \left(\frac{k+k}{k-k'}\right)^2\right]. \tag{f,14}$$

Общая формула для $J_\gamma^{sp}(\alpha, \alpha')$ может быть выведена, но она настолько сложна, что ею неудобно пользоваться. Удобнее пользоваться рекуррентными формулами, позволяющими свести интегралы $J_\gamma^{sp}(\alpha, \alpha')$ к интегралу с $s = p = 0$ [1]. Формула

$$J_\gamma^{sp}(\alpha, \alpha') = \frac{\gamma - 1}{k}\{J_{\gamma-1}^{s,\,p-1}(\alpha, \alpha') - J_{\gamma-1}^{s,\,p-1}(\alpha - 1, \alpha')\} \qquad (f,15)$$

дает возможность свести $J_\gamma^{sp}(\alpha, \alpha')$ к интегралу с $p = 0$. После этого формула

$$J_\gamma^{s+1,\,0}(\alpha, \alpha') = \frac{4}{k^2 - k'^2}\left\{\left[\frac{\gamma}{2}(k - k') - k\alpha + k'\alpha' - k's\right] J_\gamma^{s0}(\alpha, \alpha') + \right.$$

$$\left. + s(\gamma - 1 + s - 2\alpha') J_\gamma^{s-1,\,0}(\alpha, \alpha') + 2\alpha' s J_\gamma^{s-1,\,0}(\alpha, \alpha' + 1)\right\} \qquad (f,16)$$

позволяет произвести окончательное приведение к интегралу с $s = p = 0$.

---

[1]) См. *W. Gordon*, Ann. d. Phys. 2, 1031 (1929).