ГЛАВА I

ФОТОН

§ 2. Квантование свободного электромагнитного поля

Поставив своей целью рассмотреть электромагнитное поле как квантовый объект, удобно исходить из такого классического описания поля, в котором оно характеризуется хотя и бесконечным, но дискретным рядом переменных; такое описание позволит непосредственно применить обычный аппарат квантовой механики. Представление же поля с помощью потенциалов, задаваемых в каждой точке пространства, есть по существу описание с помощью непрерывного множества переменных.

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ —векторный потенциал свободного электромагнитного поля, удовлетворяющий «условию поперечности»

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{2,1}$$

При этом скалярный потенциал $\Phi = 0$, а поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{2,2}$$

Уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению для $\mathbf{A}$:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2,3}$$

Как известно (см. II, § 52), в классической электродинамике переход к описанию с помощью дискретного ряда переменных осуществляется путем рассмотрения поля в некотором большом, но конечном объеме пространства V[1]. Напомним, как это делается, опустив детали вычислений.

Поле в конечном объеме может быть разложено на бегущие плоские волны, так что его потенциал изобразится рядом вида

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\right), \tag{2,4}$$

где коэффициенты $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ зависят от времени по закону

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sim e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\mathbf{k}|. \tag{2,5}$$

[1]) Во избежание загромождения формул лишними множителями будем полагать $V = 1$.

В силу условия (2,1) комплексные векторы $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ ортогональны соответствующим волновым векторам: $\mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{k}=0$.

Суммирование в (2,4) производится по бесконечному дискретному набору значений волнового вектора (его трех компонент k_x, k_y, k_z). Переход к интегрированию по непрерывному распределению можно произвести с помощью выражения

$$d^3k/(2\pi)^3$$

для числа возможных значений $\mathbf{k}$, приходящихся на элемент объема $\mathbf{k}$-пространства $d^3k = dk_x dk_y dk_z$.

Заданием векторов $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ полностью определяется поле в данном объеме. Таким образом, эти величины можно рассматривать как дискретный набор классических «переменных поля». Для выяснения способа перехода к квантовой теории, однако, следует произвести еще некоторое преобразование этих переменных, в результате которого уравнения поля приобретают вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) классической механики. Канонические переменные поля определяются посредством

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\mathbf{a}_\mathbf{k}+\mathbf{a}_\mathbf{k}^*\right), \\ \mathbf{P}_\mathbf{k} &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}}\left(\mathbf{a}_\mathbf{k}-\mathbf{a}_\mathbf{k}^*\right)=\dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2,6}$$

(они, очевидно, вещественны). Векторный потенциал выражается через канонические переменные согласно

$$\mathbf{A}=\sqrt{4\pi}\sum_\mathbf{k}\left(\mathbf{Q}_\mathbf{k}\cos\mathbf{kr}-\frac{1}{\omega}\mathbf{P}_\mathbf{k}\sin\mathbf{kr}\right). \tag{2,7}$$

Для нахождения функции Гамильтона H надо вычислить полную энергию поля

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)\,d^3x,$$

выразив ее через величины $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$, $\mathbf{P}_\mathbf{k}$. Представив $\mathbf{A}$ в виде разложения (2,7), вычислив $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (2,2) и произведя интегрирование, получим

$$H=\frac{1}{2}\sum_\mathbf{k}\left(\mathbf{P}_\mathbf{k}^2+\omega^2\mathbf{Q}_\mathbf{k}^2\right).$$

Каждый из векторов $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$ перпендикулярен волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей волны. Обозначив две компоненты векторов $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$, $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, $P_{\mathbf{k}\alpha}$

($\alpha = 1,2$), перепишем функцию Гамильтона в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2}\left(P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2\right). \tag{2,8}$$

Таким образом, функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, $P_{\mathbf{k}\alpha}$. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией, причем имеет вид функции Гамильтона одномерного гармонического осциллятора. Поэтому о полученном разложении говорят как о разложении поля на *осцилляторы.*

Перейдем теперь к квантованию свободного электромагнитного поля. Изложенный способ классического описания поля делает очевидным путь перехода к квантовой теории. Мы должны рассматривать теперь канонические переменные — обобщенные координаты $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ и обобщенные импульсы $P_{\mathbf{k}\alpha}$ — как операторы с правилом коммутации

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = -i \tag{2,9}$$

(операторы же с разными $\mathbf{k}\alpha$ все коммутативны друг с другом). Вместе с ними становятся операторами (эрмитовыми) также потенциал $\mathbf{A}$ и, согласно (2,2), напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Последовательное определение гамильтониана поля требует вычисления интеграла

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi}\int (\hat{\mathbf{E}}^2 + \hat{\mathbf{H}}^2)\, d^3x, \tag{2,10}$$

в котором $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ выражены через операторы $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$. Фактически, однако, некоммутативность последних при этом не проявляется, так как произведения $Q_{\mathbf{k}\alpha}P_{\mathbf{k}\alpha}$ входят с множителем $\cos\mathbf{kr}\cdot\sin\mathbf{kr}$, обращающимся в нуль при интегрировании по всему объему. Поэтому в результате для гамильтониана получается выражение

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2}\left(\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}^2\right), \tag{2,11}$$

в точности соответствующее классической функции Гамильтона, что и естественно было ожидать.

Определение собственных значений этого гамильтониана не требует особых вычислений, так как сводится к известной задаче об уровнях энергии линейных осцилляторов (см. III, § 23). Поэтому мы можем сразу написать для уровней энергии поля

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\omega, \tag{2,12}$$

где $N_{\mathbf{k}\alpha}$ — целые числа.

К обсуждению этой формулы мы вернемся в следующем параграфе, а сейчас выпишем матричные элементы величин $Q_{k\alpha}$, что можно сделать непосредственно с помощью известных формул для матричных элементов координат осциллятора (см. III, § 23). Отличные от нуля матричные элементы равны

$$\langle N_{k\alpha} | Q_{k\alpha} | N_{k\alpha} - 1\rangle = \langle N_{k\alpha} - 1 | Q_{k\alpha} | N_{k\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{N_{k\alpha}}{2\omega}}. \quad (2,13)$$

Матричные элементы величин $P_{k\alpha} = \dot{Q}_{k\alpha}$ отличаются от матричных элементов $Q_{k\alpha}$ лишь множителем $\pm i\omega$.

В дальнейших вычислениях, однако, будет удобнее пользоваться вместо величин $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ их линейными комбинациями $\omega Q_{k\alpha} \pm iP_{k\alpha}$, которые имеют матричные элементы только для переходов $N_{k\alpha} \to N_{k\alpha} \pm 1$. Соответственно этому вводим операторы

$$\hat{c}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{k\alpha} + i\hat{P}_{k\alpha}), \quad \hat{c}^{+}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{k\alpha} - i\hat{P}_{k\alpha}) \quad (2,14)$$

(классические величины $c_{k\alpha}$, $c^{*}_{k\alpha}$ совпадают с точностью до множителя $\sqrt{2\pi/\omega}$ с коэффициентами $a_{k\alpha}$, $a^{*}_{k\alpha}$ в разложении (2,4)). Матричные элементы этих операторов равны

$$\langle N_{k\alpha} - 1 | c_{k\alpha} | N_{k\alpha}\rangle = \langle N_{k\alpha} | c^{+}_{k\alpha} | N_{k\alpha} - 1\rangle = \sqrt{N_{k\alpha}}. \quad (2,15)$$

Правило коммутации между $\hat{c}_{k\alpha}$ и $\hat{c}^{+}_{k\alpha}$ получается с помощью определения (2,14) и правила (2,9):

$$\hat{c}_{k\alpha}\hat{c}^{+}_{k\alpha} - \hat{c}^{+}_{k\alpha}\hat{c}_{k\alpha} = 1. \quad (2,16)$$

Для векторного потенциала мы возвращаемся к разложению вида (2,4), в котором, однако, коэффициенты являются теперь операторами. Напишем его в виде

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha}\mathbf{A}_{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}\mathbf{A}^{*}_{k\alpha}), \quad (2,17)$$

где

$$\mathbf{A}_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\, \frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\, e^{i\mathbf{kr}}. \quad (2,18)$$

Мы ввели обозначение $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для единичных векторов, указывающих направление поляризации осцилляторов; векторы $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$, причем для каждого $\mathbf{k}$ имеются две независимые поляризации.

Аналогично для операторов $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ напишем

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha}\mathbf{E}_{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}\mathbf{E}^{*}_{k\alpha}), \quad \hat{\mathbf{H}} = \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha}\mathbf{H}_{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}\mathbf{H}^{*}_{k\alpha}), \quad (2,19)$$

причем

$$\mathbf{E}_{k\alpha} = i\omega\mathbf{A}_{k\alpha}, \quad \mathbf{H}_{k\alpha} = [\mathbf{n}\mathbf{E}_{k\alpha}] \quad (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega). \quad (2,20)$$

Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ взаимно ортогональны в том смысле, что

$$\int \mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}'\alpha'}\,d^3x = \frac{2\pi}{\omega}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{2,21}$$

Действительно, если $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}'\alpha'}$ различаются волновыми векторами, то их произведение содержит множитель $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, дающий нуль при интегрировании по объему; если же они различаются лишь поляризациями, то $\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{e}^{(\alpha')*}=0$, так как два независимых направления поляризации взаимно ортогональны. Аналогичные соотношения справедливы для векторов $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$. Их нормировку удобно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int \left(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^*_{\mathbf{k}'\alpha'} + \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^*_{\mathbf{k}'\alpha'}\right) d^3x = \omega\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2,22}$$

Подставив операторы (2,19) в (2,10) и произведя интегрирование с помощью (2,22), получим гамильтониан поля, выраженный через операторы $\hat{c}$, $\hat{c}^+$:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}\,\omega\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha} + \hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\right). \tag{2,23}$$

Этот оператор в рассматриваемом представлении (матричные элементы операторов $\hat{c}$, $\hat{c}^+$ из (2,15)) диагонален, и его собственные значения совпадают, конечно, с (2,12).

В классической теории импульс поля определяется как интеграл:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi}\int [\mathbf{E}\mathbf{H}]\,d^3x.$$

При переходе к квантовой теории заменяем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ операторами (2,19) и без труда находим

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}\left(\hat{P}^2_{\mathbf{k}\alpha} + \omega^2\hat{Q}^2_{\mathbf{k}\alpha}\right)\mathbf{n} \tag{2,24}$$

— в соответствии с известным классическим соотношением между энергией и импульсом плоских волн. Собственные значения этого оператора

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}\left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right). \tag{2,25}$$

Представление операторов, осуществляемое матричными элементами (2,15), есть «представление чисел заполнения», — оно отвечает описанию состояния системы (поля) путем задания квантовых чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$ (*числа заполнения*). В этом представлении операторы поля (2,19) (а с ними и гамильтониан (2,11)) действуют на волновую функцию системы, выраженную в функции чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$; обозначим ее $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$. Операторы поля (2,19) не зависят явно от времени. Это соответствует обычному в нерелятивистской квантовой механике шредингеровскому представлению операторов. Зависящим же от времени является при этом состояние системы $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$, причем эта зависимость определяется уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \hat{H}\Phi.$$

Такое описание поля по существу релятивистски инвариантно, поскольку оно базируется на инвариантных уравнениях Максвелла. Но эта инвариантность не выявлена явно, — прежде всего потому, что пространственные координаты и время входят в описание крайне несимметричным образом.

В релятивистской теории целесообразно придать описанию внешне более инвариантный вид. Для этой цели надо воспользоваться так называемым гейзенберговским представлением, в котором явная временная зависимость перенесена на сами операторы (см. III, § 13). Тогда время и координаты будут равноправным образом входить в выражения для операторов поля, а состояние системы Φ будет функцией только от чисел заполнения.

Для оператора $\hat{\mathbf{A}}$ переход к гейзенберговскому представлению сводится к замене в каждом члене суммы в (2,17), (2,18) множителя $e^{i\mathbf{kr}}$ на $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, т. е. к тому, чтобы под $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ понимать зависящие от времени функции

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\,\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}. \tag{2,26}$$

В этом легко убедиться, заметив, что матричный элемент гейзенберговского оператора для перехода $i \to f$ должен содержать множитель $\exp\{-i(E_i - E_f)t\}$, где E_i и E_f — энергии начального и конечного состояний (см. III, § 13). Для перехода с уменьшением или увеличением $N_{\mathbf{k}}$ на 1 этот множитель сводится соответственно к $e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}$. Это требование будет соблюдено в результате указанной замены.

В дальнейшем (при рассмотрении как электромагнитного поля, так и полей частиц) мы всегда будем подразумевать гейзенберговское представление операторов.

§ 3. Фотоны

Обратимся к обсуждению полученных формул квантования поля.

Прежде всего, формула (2,12) для энергии поля обнаруживает следующую трудность. Наиболее низкому уровню энергии