чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$; обозначим ее $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$. Операторы поля (2,19) не зависят явно от времени. Это соответствует обычному в нерелятивистской квантовой механике шредингеровскому представлению операторов. Зависящим же от времени является при этом состояние системы $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$, причем эта зависимость определяется уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \hat{H}\Phi.$$

Такое описание поля по существу релятивистски инвариантно, поскольку оно базируется на инвариантных уравнениях Максвелла. Но эта инвариантность не выявлена явно, — прежде всего потому, что пространственные координаты и время входят в описание крайне несимметричным образом.

В релятивистской теории целесообразно придать описанию внешне более инвариантный вид. Для этой цели надо воспользоваться так называемым гейзенберговским представлением, в котором явная временная зависимость перенесена на сами операторы (см. III, § 13). Тогда время и координаты будут равноправным образом входить в выражения для операторов поля, а состояние системы Φ будет функцией только от чисел заполнения.

Для оператора $\hat{\mathbf{A}}$ переход к гейзенберговскому представлению сводится к замене в каждом члене суммы в (2,17), (2,18) множителя $e^{i\mathbf{kr}}$ на $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, т. е. к тому, чтобы под $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ понимать зависящие от времени функции

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\,\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}. \qquad (2,26)$$

В этом легко убедиться, заметив, что матричный элемент гейзенберговского оператора для перехода $i\to f$ должен содержать множитель $\exp\{-i(E_i-E_f)t\}$, где E_i и E_f — энергии начального и конечного состояний (см. III, § 13). Для перехода с уменьшением или увеличением $N_{\mathbf{k}}$ на 1 этот множитель сводится соответственно к $e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}$. Это требование будет соблюдено в результате указанной замены.

В дальнейшем (при рассмотрении как электромагнитного поля, так и полей частиц) мы всегда будем подразумевать гейзенберговское представление операторов.

§ 3. Фотоны

Обратимся к обсуждению полученных формул квантования поля.

Прежде всего, формула (2,12) для энергии поля обнаруживает следующую трудность. Наиболее низкому уровню энергии поля соответствует равенство нулю квантовых чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$ всех осцилляторов (это состояние называют состоянием *вакуума электромагнитного поля*). Но даже в этом состоянии каждый осциллятор обладает отличной от нуля «нулевой энергией» $\omega/2$. При суммировании же по всему бесконечному числу осцилляторов мы получим бесконечный результат. Таким образом, мы сталкиваемся с одной из «расходимостей», к которым приводит отсутствие полной логической замкнутости существующей теории.

Пока речь идет лишь о собственных значениях энергии поля, можно устранить эту трудность простым вычеркиванием энергии нулевых колебаний, т. е. написав для энергии и импульса поля [1])

$$E=\sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha}\omega, \quad \mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}. \tag{3,1}$$

Эти формулы позволяют ввести основное для всей квантовой электродинамики понятие о *световых квантах*, или *фотонах* [2]). Именно, мы можем рассматривать свободное электромагнитное поле как совокупность частиц, каждая из которых имеет энергию $\omega(=\hbar\omega)$ и импульс $\mathbf{k}(=\mathbf{n}\hbar\omega/c)$. Соотношение между энергией и импульсом фотона — такое, каким оно должно быть в релятивистской механике для частиц с равной нулю массой покоя, движущихся со скоростью света. Числа заполнения $N_{\mathbf{k}\alpha}$ приобретают смысл чисел фотонов с данными импульсами $\mathbf{k}$ и поляризациями $\mathbf{e}^{(\alpha)}$. Свойство поляризации фотона аналогично понятию спина у других частиц (специфические особенности фотона в этом отношении будут рассмотрены ниже, в § 6).

Легко видеть, что развитый в предыдущем параграфе математический формализм находится в полном соответствии с представлением об электромагнитном поле как о совокупности фотонов; это есть не что иное, как аппарат так называемого вторичного квантования в применении к системе фотонов [3]). В этом методе (см. III, § 64) роль независимых переменных играют числа заполнения состояний, а операторы действуют на функции этих чисел. При этом основную роль играют операторы «уничтожения» и «рождения» частиц, соответственно уменьшающие или

---

[1]) Это вычеркивание можно произвести формально не противоречивым образом, условившись понимать произведения операторов в (2,10) как «нормальные», т. е. такие, в которых операторы $\hat{c}^+$ располагаются всегда левее операторов $\hat{c}$. Формула (2,23) примет тогда вид

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(\omega\hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\right).$$

[2]) Представление о фотонах было впервые введено *Эйнштейном* (*A. Einstein*, 1905).

[3]) Метод вторичного квантования в применении к теории излучения был развит *Дираком* (*P. A. M. Dirac*, 1927).

увеличивающие на единицу числа заполнения. Именно такими операторами и являются $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$: оператор $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ уничтожает фотон в состоянии $\mathbf{k}\alpha$, а $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ — рождает фотон в этом состоянии.

Правило коммутации (2,16) соответствует случаю частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Таким образом, фотоны являются бозонами, как этого и следовало ожидать заранее: допустимое число фотонов в любом состоянии может быть произвольным (мы вернемся еще в § 5 к роли этого обстоятельства).

Плоские волны $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ (2,26), фигурирующие в операторе $\hat{\mathbf{A}}$ (2,17) в качестве коэффициентов перед операторами уничтожения фотонов, можно трактовать как волновые функции фотонов, обладающих определенными импульсами $\mathbf{k}$ и поляризациями $\mathbf{e}^{(\alpha)}$. Такая трактовка соответствует разложению ψ-оператора в виде ряда по волновым функциям стационарных состояний частицы в нерелятивистском аппарате вторичного квантования (в отличие от последнего, однако, в разложение (2,17) входят как операторы уничтожения, так и операторы рождения частиц; смысл этого различия выяснится в дальнейшем, см. § 12).

Волновая функция (2,26) нормирована условием

$$\int \frac{1}{4\pi}\left(|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}|^2 + |\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}|^2\right) d^3x = \omega. \tag{3,2}$$

Это есть нормировка на один фотон в объеме $V = 1$. Действительно, интеграл в левой стороне равенства представляет собой квантовомеханическое среднее значение энергии фотона в состоянии с данной волновой функцией[1]). В правой же стороне равенства (3,2) стоит энергия одного фотона.

Роль «уравнения Шредингера» для фотона играют уравнения Максвелла. В данном случае (для потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего условию (2,1)) это — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 0.$$

«Волновые функции» фотона в общем случае произвольных стационарных состояний представляют собой комплексные решения этого уравнения, зависящие от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$.

Говоря о волновой функции фотона, подчеркнем лишний раз, что ее отнюдь нельзя рассматривать как амплитуду вероятности пространственной локализации фотона — в противоположность основному смыслу волновой функции в нерелятивистской кван-

[1]) Обратим внимание на то, что коэффициент $1/4\pi$ в интеграле (3,2) в два раза больше обычного коэффициента $1/8\pi$ в (2,10). Эта разница связана, в конечном счете, с комплексностью векторов $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$, в отличие от эрмитовых операторов поля $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$.

товой механике. Это связано с тем, что (как было указано в § 1) понятие координат фотона вообще не имеет физического смысла. К математическому аспекту этой ситуации мы вернемся еще в конце следующего параграфа.

Компоненты разложения Фурье функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ по координатам образуют волновую функцию фотона в импульсном представлении; обозначим ее $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$. Так, для состояния с определенным импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ волновая функция импульсного представления дается просто коэффициентом при экспоненциальном множителе в (2,26):

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi}\,\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}\delta_{\alpha'\alpha}. \tag{3,3}$$

В соответствии с измеримостью импульса свободной частицы волновая функция импульсного представления имеет более глубокий физический смысл, чем функция координатного представления: она дает возможность вычислить вероятности $w_{\mathbf{k}\alpha}$ различных значений импульса и поляризации фотона, находящегося в заданном состоянии. Согласно общим правилам квантовой механики $w_{\mathbf{k}\alpha}$ дается квадратом модулей коэффициентов разложения функции $\mathbf{A}(\mathbf{k}')$ по волновым функциям состояний с определенными $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}^{(\alpha)}$:

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto \left|\sum_{\mathbf{k}'\alpha'} \mathbf{A}^{*}_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha')\,\mathbf{A}(\mathbf{k}')\right|^2$$

(коэффициент пропорциональности зависит от способа нормировки функций). Подставив сюда (3,3), получим

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto |\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3,4}$$

После суммирования по двум поляризациям найдем вероятность того, что фотон имеет импульс $\mathbf{k}$:

$$w_{\mathbf{k}} \propto |\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3,5}$$

§ 4. Калибровочная инвариантность

Как известно, выбор потенциалов поля в классической электродинамике неоднозначен: компоненты 4-потенциала A_μ можно подвергнуть произвольному *калибровочному* (или *градиентному*) преобразованию вида

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{4,1}$$

где χ — произвольная функция координат и времени (см. II, § 18).

Для плоской волны, если ограничиться преобразованиями, не меняющими вида потенциала (его пропорциональности множителю $\exp(-ik_\mu x^\mu)$), неоднозначность сводится к возможности прибавления к амплитуде волны любого 4-вектора, пропорционального 4-вектору k^μ.