товой механике. Это связано с тем, что (как было указано в § 1) понятие координат фотона вообще не имеет физического смысла. К математическому аспекту этой ситуации мы вернемся еще в конце следующего параграфа.

Компоненты разложения Фурье функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ по координатам образуют волновую функцию фотона в импульсном представлении; обозначим ее $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$. Так, для состояния с определенным импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ волновая функция импульсного представления дается просто коэффициентом при экспоненциальном множителе в (2,26):

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi}\,\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}\delta_{\alpha'\alpha}. \tag{3,3}$$

В соответствии с измеримостью импульса свободной частицы волновая функция импульсного представления имеет более глубокий физический смысл, чем функция координатного представления: она дает возможность вычислить вероятности $w_{\mathbf{k}\alpha}$ различных значений импульса и поляризации фотона, находящегося в заданном состоянии. Согласно общим правилам квантовой механики $w_{\mathbf{k}\alpha}$ дается квадратом модулей коэффициентов разложения функции $\mathbf{A}(\mathbf{k}')$ по волновым функциям состояний с определенными $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}^{(\alpha)}$:

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto \left|\sum_{\mathbf{k}'\alpha'} \mathbf{A}^{*}_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha')\,\mathbf{A}(\mathbf{k}')\right|^2$$

(коэффициент пропорциональности зависит от способа нормировки функций). Подставив сюда (3,3), получим

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto |\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3,4}$$

После суммирования по двум поляризациям найдем вероятность того, что фотон имеет импульс $\mathbf{k}$:

$$w_{\mathbf{k}} \propto |\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3,5}$$

§ 4. Калибровочная инвариантность

Как известно, выбор потенциалов поля в классической электродинамике неоднозначен: компоненты 4-потенциала A_μ можно подвергнуть произвольному *калибровочному* (или *градиентному*) преобразованию вида

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{4,1}$$

где χ — произвольная функция координат и времени (см. II, § 18).

Для плоской волны, если ограничиться преобразованиями, не меняющими вида потенциала (его пропорциональности множителю $\exp(-ik_\mu x^\mu)$), неоднозначность сводится к возможности прибавления к амплитуде волны любого 4-вектора, пропорционального 4-вектору k^μ.

Неоднозначность потенциала сохраняется, конечно, и в квантовой теории — применительно к операторам поля или к волновым функциям фотонов. Не предрешая способа выбора потенциалов, надо писать вместо (2,17) аналогичное разложение для операторного 4-потенциала

$$\hat{A}^{\mu}=\sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}A^{\mu}_{\mathbf{k}\alpha}+\overset{+}{\hat{c}}_{\mathbf{k}\alpha}A^{\mu*}_{\mathbf{k}\alpha}\right), \qquad (4,2)$$

где волновые функции $A^{\mu}_{\mathbf{k}\alpha}$ — 4-векторы вида

$$A^{\mu}_{\mathbf{k}}=\sqrt{4\pi}\,\frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-ik_{\nu}x^{\nu}}, \qquad e_{\mu}e^{\mu*}=-1,$$

или в краткой записи, опуская четырехмерные векторные индексы:

$$A_{\mathbf{k}}=\sqrt{4\pi}\,\frac{e}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-ikx}, \qquad ee^{*}=-1. \qquad (4,3)$$

Здесь 4-импульс $k^{\mu}=(\omega,\,\mathbf{k})$ (так что $kx=\omega t-\mathbf{kr}$), а e — единичный 4-вектор поляризации [1]).

Если ограничиться калибровочными преобразованиями, не меняющими зависимости функции (4,3) от координат и времени, то они будут состоять в замене

$$e_{\mu}\rightarrow e_{\mu}+\chi k_{\mu}, \qquad (4,4)$$

где $\chi=\chi(k^{\mu})$ — произвольная функция. Поперечность поляризации означает, что всегда возможна такая калибровка, при которой 4-вектор e имеет вид

$$e^{\mu}=(0,\,\mathbf{e}), \qquad \mathbf{ek}=0 \qquad (4,5)$$

(такую калибровку мы будем называть *трехмерно поперечной*). В инвариантном четырехмерном виде это требование записывается в виде условия *четырехмерной поперечности*

$$ek=0. \qquad (4,6)$$

Обратим внимание на то, что это условие (как и нормировочное условие $ee^{*}=-1$) не нарушается преобразованием (4,4) в силу того, что $k^2=0$. С другой стороны, равенство нулю квадрата 4-импульса частицы означает равенство нулю ее массы. Тем самым выявляется связь между калибровочной инвариантностью

---

[1]) Выражение (4,3) не имеет вполне релятивистски-ковариантного (4-векторного) вида, что связано с неинвариантным характером принятой нами нормировки на конечный объем $V=1$. Это, однако, не имеет принципиального значения и вполне компенсируется удобствами такого способа нормировки. Мы увидим в дальнейшем, что им обеспечивается простое и автоматическое получение реальных физических величин в должной инвариантной форме.

и равенством нулю массы фотона (другие аспекты этой связи будут указаны в § 14).

Никакие измеримые физические величины не должны меняться при калибровочном преобразовании волновых функций фотонов, участвующих в процессе. Это требование *калибровочной инвариантности* играет в квантовой электродинамике даже бо́льшую роль, чем в классической теории. Мы увидим на многочисленных примерах, что оно является здесь, наряду с требованием релятивистской инвариантности, мощным эвристическим принципом.

В свою очередь калибровочная инвариантность теории тесно связана с законом сохранения электрического заряда; мы остановимся на этом ее аспекте в § 43.

Мы упоминали уже в предыдущем параграфе, что координатная волновая функция фотона не может быть истолкована как амплитуда вероятности его пространственной локализации. В математическом аспекте это обстоятельство проявляется в невозможности составить с помощью волновой функции величину, которая уже хотя бы по своим формальным свойствам могла играть роль плотности вероятности. Такая величина должна была бы выражаться существенно положительной билинейной комбинацией из волновой функции A_μ и ее комплексно-сопряженной. Кроме того, она должна была бы удовлетворять определенным требованиям релятивистской ковариантности — представлять собой временную компоненту 4-вектора (дело в том, что уравнение непрерывности, выражающее сохранение числа частиц, записывается в четырехмерном виде как равенство нулю дивергенции 4-вектора тока; временно́й компонентой последнего и является в данном случае плотность вероятности локализации частицы, см. II, § 29). С другой стороны, в силу требования калибровочной инвариантности 4-вектор A_μ мог бы входить в ток лишь в виде антисимметричного тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. Таким образом, 4-вектор тока должен был бы составляться билинейно из $F_{\mu\nu}$ и $F^*_{\mu\nu}$ (и компонент 4-вектора k_μ). Но такой 4-вектор вообще невозможно составить: всякое выражение, удовлетворяющее поставленным условиям (например, $k^\lambda F^*_{\mu\nu} F_\lambda{}^\nu$), обращается в нуль в силу условия поперечности ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), не говоря уже о том, что оно не было бы существенно положительным (так как содержит нечетные степени компонент k_μ).

§ 5. Электромагнитное поле в квантовой теории

Описание поля как совокупности фотонов есть единственное описание, вполне адекватное физическому смыслу электромагнитного поля в квантовой теории. Оно заменяет классическое