и равенством нулю массы фотона (другие аспекты этой связи будут указаны в § 14).

Никакие измеримые физические величины не должны меняться при калибровочном преобразовании волновых функций фотонов, участвующих в процессе. Это требование *калибровочной инвариантности* играет в квантовой электродинамике даже бóльшую роль, чем в классической теории. Мы увидим на многочисленных примерах, что оно является здесь, наряду с требованием релятивистской инвариантности, мощным эвристическим принципом.

В свою очередь калибровочная инвариантность теории тесно связана с законом сохранения электрического заряда; мы остановимся на этом ее аспекте в § 43.

Мы упоминали уже в предыдущем параграфе, что координатная волновая функция фотона не может быть истолкована как амплитуда вероятности его пространственной локализации. В математическом аспекте это обстоятельство проявляется в невозможности составить с помощью волновой функции величину, которая уже хотя бы по своим формальным свойствам могла играть роль плотности вероятности. Такая величина должна была бы выражаться существенно положительной билинейной комбинацией из волновой функции A_μ и ее комплексно-сопряженной. Кроме того, она должна была бы удовлетворять определенным требованиям релятивистской ковариантности — представлять собой временную компоненту 4-вектора (дело в том, что уравнение непрерывности, выражающее сохранение числа частиц, записывается в четырехмерном виде как равенство нулю дивергенции 4-вектора тока; временнóй компонентой последнего и является в данном случае плотность вероятности локализации частицы, см. II, § 29). С другой стороны, в силу требования калибровочной инвариантности 4-вектор A_μ мог бы входить в ток лишь в виде антисимметричного тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. Таким образом, 4-вектор тока должен был бы составляться билинейно из $F_{\mu\nu}$ и $F^*_{\mu\nu}$ (и компонент 4-вектора k_μ). Но такой 4-вектор вообще невозможно составить: всякое выражение, удовлетворяющее поставленным условиям (например, $k^\lambda F^*_{\mu\nu} F_\lambda{}^\nu$), обращается в нуль в силу условия поперечности ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), не говоря уже о том, что оно не было бы существенно положительным (так как содержит нечетные степени компонент k_μ).

§ 5. Электромагнитное поле в квантовой теории

Описание поля как совокупности фотонов есть единственное описание, вполне адекватное физическому смыслу электромагнитного поля в квантовой теории. Оно заменяет классическое описание с помощью напряженностей поля. Последние выступают в математическом аппарате фотонной картины как операторы вторичного квантования.

Как известно, свойства квантовой системы приближаются к классическим в тех случаях, когда велики квантовые числа, определяющие стационарные состояния системы. Для свободного электромагнитного поля (в заданном объеме) это означает, что должны быть велики квантовые числа осцилляторов, т. е. числа фотонов $N_{\mathbf{k}\alpha}$. В этом смысле глубокое значение имеет то обстоятельство, что фотоны подчиняются статистике Бозе. В математическом формализме теории связь статистики Бозе со свойствами классического поля проявляется в правилах коммутации операторов $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$. При больших $N_{\mathbf{k}\alpha}$, когда велики матричные элементы этих операторов, можно пренебречь единицей в правой стороне перестановочного соотношения (2,16), в результате чего получится

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \approx \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha},$$

т. е. эти операторы перейдут в коммутирующие друг с другом классические величины $c_{\mathbf{k}\alpha}$, $c^{*}_{\mathbf{k}\alpha}$, определяющие классические напряженности поля.

Условие квазиклассичности поля требует, однако, еще уточнения. Дело в том, что если велики все числа $N_{\mathbf{k}\alpha}$, то при суммировании по всем состояниям $\mathbf{k}\alpha$ энергия поля во всяком случае окажется бесконечной, так что условие становится беспредметным.

Физически осмысленная постановка вопроса об условиях квазиклассичности онована на рассмотрении значений поля, усредненных по некоторому небольшому промежутку времени Δt. Если представить классическое электрическое поле $\mathbf{E}$ (или магнитное поле $\mathbf{H}$) в виде разложения в интеграл Фурье по времени, то при усреднении его по промежутку времени Δt заметный вклад в среднее значение $\overline{\mathbf{E}}$ дадут только те из компонент Фурье, частоты которых удовлетворяют условию $\omega\Delta t \lesssim 1$; в противном случае осциллирующий множитель $e^{-i\omega t}$ при усреднении почти обратится в нуль. Поэтому при выяснении условия квазиклассичности усредненного поля надо рассматривать лишь те из квантовых осцилляторов, частоты которых $\omega \lesssim 1/\Delta t$. Достаточно потребовать, чтобы были велики квантовые числа этих осцилляторов.

Число осцилляторов с частотами между нулем и $\omega \sim 1/\Delta t$ (отнесенное к объему $V=1$) по порядку величины равно[1])

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\,\Delta t)^3}. \qquad (5,1)$$

[1]) В этом параграфе пользуемся обычными единицами.

Полная энергия поля в единичном объеме $\sim \overline{\mathbf{E}^2}$. Разделив эту величину на число осцилляторов и на некоторую среднюю энергию отдельного фотона ($\sim \hbar\omega$), найдем порядок величины чисел фотонов

$$N_{\mathbf{k}} \sim \frac{\overline{\mathbf{E}^2} c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Потребовав, чтобы это число было велико, получим неравенство

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\,\Delta t)^2}. \tag{5,2}$$

Это и есть искомое условие, допускающее классическое рассмотрение усредненного (по промежуткам времени Δt) поля. Мы видим, что поле должно быть достаточно сильным — тем большим, чем меньше интервал усреднения Δt. Для переменных полей этот интервал не должен, разумеется, превышать периодов времени, в течение которых поле заметно меняется. Поэтому достаточно слабые переменные поля во всяком случае не могут быть квазиклассичны. Лишь в случае статических (постоянных во времени) полей можно положить $\Delta t \to \infty$, так что правая сторона неравенства (5,2) обращается в нуль. Это значит, что статическое поле всегда классично.

Уже было указано, что классические выражения для электромагнитного поля в виде суперпозиции плоских волн должны рассматриваться в квантовой теории как операторные. Физический смысл этих операторов, однако, весьма ограничен. Действительно, физически осмысленный оператор поля должен был бы приводить к равным нулю значениям поля в состоянии фотонного вакуума. Между тем среднее значение оператора квадрата поля $\hat{\mathbf{E}}^2$ в нормальном состоянии, совпадающее с точностью до множителя с нулевой энергией поля, оказывается бесконечным (под «средним значением» мы понимаем квантовомеханическое среднее значение, т. е. соответствующий диагональный матричный элемент оператора). Избежать этого нельзя даже с помощью какой-либо формальной операции вычеркивания (как это можно сделать для энергии поля), так как в данном случае мы должны были бы сделать это путем некоторого разумного видоизменения самих операторов $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ (а не их квадратов), что оказывается невозможным.

§ 6. Момент и четность фотона

Как и всякая частица, фотон может обладать определенным моментом импульса. Для выяснения свойств этой величины у фотона предварительно напомним, каким образом связаны