Полная энергия поля в единичном объеме $\sim \overline{\mathbf{E}^2}$. Разделив эту величину на число осцилляторов и на некоторую среднюю энергию отдельного фотона ($\sim \hbar\omega$), найдем порядок величины чисел фотонов

$$N_{\mathbf{k}} \sim \frac{\overline{\mathbf{E}^2} c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Потребовав, чтобы это число было велико, получим неравенство

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\,\Delta t)^2}. \tag{5,2}$$

Это и есть искомое условие, допускающее классическое рассмотрение усредненного (по промежуткам времени Δt) поля. Мы видим, что поле должно быть достаточно сильным — тем большим, чем меньше интервал усреднения Δt. Для переменных полей этот интервал не должен, разумеется, превышать периодов времени, в течение которых поле заметно меняется. Поэтому достаточно слабые переменные поля во всяком случае не могут быть квазиклассичны. Лишь в случае статических (постоянных во времени) полей можно положить $\Delta t \to \infty$, так что правая сторона неравенства (5,2) обращается в нуль. Это значит, что статическое поле всегда классично.

Уже было указано, что классические выражения для электромагнитного поля в виде суперпозиции плоских волн должны рассматриваться в квантовой теории как операторные. Физический смысл этих операторов, однако, весьма ограничен. Действительно, физически осмысленный оператор поля должен был бы приводить к равным нулю значениям поля в состоянии фотонного вакуума. Между тем среднее значение оператора квадрата поля $\hat{\mathbf{E}}^2$ в нормальном состоянии, совпадающее с точностью до множителя с нулевой энергией поля, оказывается бесконечным (под «средним значением» мы понимаем квантовомеханическое среднее значение, т. е. соответствующий диагональный матричный элемент оператора). Избежать этого нельзя даже с помощью какой-либо формальной операции вычеркивания (как это можно сделать для энергии поля), так как в данном случае мы должны были бы сделать это путем некоторого разумного видоизменения самих операторов $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ (а не их квадратов), что оказывается невозможным.

§ 6. Момент и четность фотона

Как и всякая частица, фотон может обладать определенным моментом импульса. Для выяснения свойств этой величины у фотона предварительно напомним, каким образом связаны

в математическом аппарате квантовой механики свойства волновой функции частицы с ее моментом.

Момент частицы **j** складывается из ее орбитального момента **l** и собственного момента — спина **s**. Волновая функция частицы со спином s есть симметричный спинор ранга $2s$, т. е. представляет собой совокупность $2s+1$ компонент, которые при поворотах системы координат преобразуются друг через друга по определенному закону. Орбитальный же момент связан с координатной зависимостью волновых функций: состояниям с орбитальным моментом l соответствуют волновые функции, компоненты которых выражаются (линейно) через шаровые функции порядка l.

Возможность последовательным образом различать спин и орбитальный момент требует, следовательно, независимости «спиновых» и «координатных» свойств волновых функций: координатная зависимость компонент спинора (в заданный момент времени) не должна ограничиваться никакими дополнительными условиями.

В импульсном представлении волновых функций координатной зависимости отвечает зависимость от импульса **k**. Волновой функцией фотона (в трехмерно поперечной калибровке) является вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. Вектор эквивалентен спинору второго ранга, и в этом смысле можно было бы приписать фотону спин 1. Но эта векторная волновая функция подчинена условно поперечности, $\mathbf{kA}(\mathbf{k})=0$, представляющему собой дополнительное условие, налагаемое на импульсную зависимость вектора $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. В результате эта зависимость уже не может быть задана для всех компонент вектора одновременно произвольным образом, что и приводит к невозможности разделения орбитального момента и спина.

Отметим, что к фотону неприменимо также определение спина как момента покоящейся частицы, поскольку для фотона, движущегося со скоростью света, вообще не существует системы покоя.

Таким образом, для фотона можно говорить лишь о его полном моменте. При этом заранее ясно, что полный момент может пробегать лишь целочисленные значения. Это видно уже из того, что среди величин, характеризующих фотон, нет никаких спиноров нечетного ранга.

Как и для всякой частицы, состояние фотона характеризуется также своей четностью, связанной с поведением волновой функции при инверсии системы координат (см. III, § 30). В импульсном представлении изменению знака координат отвечает изменение знака всех компонент **k**. Воздействие оператора инверсии $\hat{P}$ на скалярную функцию $\varphi(\mathbf{k})$ заключается только в этом изменении: $\hat{P}\varphi(\mathbf{k})=\varphi(-\mathbf{k})$. При воздействии же на векторную

функцию $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ надо еще учесть, что изменение направления осей на обратное меняет также знак всех компонент вектора; поэтому [1])

$$\hat{P}\mathbf{A}(\mathbf{k}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{k}). \tag{6,1}$$

Хотя разделение момента фотона на орбитальный момент и спин лишено физического смысла, тем не менее удобно ввести «спин» s и «орбитальный момент» l формальным образом как вспомогательные понятия, выражающие свойства преобразования волновой функции по отношению к вращениям: значение $s = 1$ отвечает векторности волновой функции, а значение l есть порядок входящих в нее шаровых функций. Мы имеем при этом в виду волновые функции состояний с определенными значениями момента фотона, представляющие собой для свободной частицы сферические волны. Число l определяет, в частности, четность состояния фотона, равную

$$P = (-1)^{l+1}. \tag{6,2}$$

В таком же смысле можно представить оператор момента $\hat{\mathbf{j}}$ как сумму $\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{l}}$. Оператор момента связан, как известно, с оператором бесконечно малого поворота системы координат; в данном случае — с действием этого оператора на векторное поле. В сумме $\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{l}}$ оператор $\hat{\mathbf{s}}$ действует на векторный индекс, преобразуя друг через друга различные компоненты вектора. Оператор же $\hat{\mathbf{l}}$ действует на эти компоненты как на функции импульса (или координат).

Подсчитаем число состояний (с заданной энергией), которые возможны при заданном значении j момента фотона (отвлекаясь при этом от тривиального $(2j+1)$-кратного вырождения по направлениям момента).

При независимых $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ такое вычисление осуществляется простым подсчетом числа способов, которыми можно по правилам векторной модели сложить моменты $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ так, чтобы получить нужное значение j. Для частицы со спином $s = 1$ мы нашли бы таким образом (при заданном отличном от нуля значении j) три состояния со следующими значениями l и четности:

$$l = j,\ P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1};\ l = j \pm 1,\ P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j}.$$

---

[1]) Условимся определять четность состояния по действию оператора инверсии на полярный вектор, каковым является $\mathbf{A}$ (или соответствующий электрический вектор $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}$). Оно отличается по знаку от действия на аксиальный вектор $\mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]$, поскольку инверсия не меняет направление такого вектора:

$$\hat{P}\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{H}(-\mathbf{k}).$$

Если же $j=0$, то получается всего одно состояние (с $l=1$) с четностью $P=+1$.

В этом подсчете, однако, не учтено условие поперечности вектора **A**; все три его компоненты рассматривались как независимые. Поэтому из полученного числа состояний надо еще вычесть число состояний, соответствующих продольному вектору. Такой вектор можно написать в виде $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$, откуда ясно, что по своим трансформационным (по отношению к вращениям) свойствам его три компоненты эквивалентны всего одному скаляру φ [1]). Следовательно, можно сказать, что лишнее состояние, не совместимое с условием поперечности, соответствовало бы состоянию частицы со скалярной волновой функцией (спинор ранга 0), т. е. со «спином 0» [2]). Момент j этого состояния совпадает поэтому с порядком входящих в φ сферических функций. Четность же этого состояния как состояния фотона определяется действием оператора инверсии на векторную функцию $\mathbf{k}\varphi$:

$$\hat{P}(\mathbf{k}\varphi) = -(-\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) = (-1)^j \mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}),$$

т. е. равна $(-1)^j$. Таким образом, из полученного выше числа состояний с четностью $(-1)^j$ (двух при $j\neq 0$ и одного при $j=0$) надо вычесть одно.

Окончательно мы приходим к результату, что при отличном от нуля моменте фотона j существуют одно четное и одно нечетное состояния. При $j=0$ мы не получим вовсе никаких состояний. Это означает, что фотон вообще не может иметь равного нулю момента, так что j пробегает лишь значения 1, 2, 3, ... Невозможность значения $j=0$, впрочем, очевидна: волновая функция состояния с равным нулю моментом должна быть сферически-симметрична, что заведомо невозможно для поперечной волны.

Принята определенная терминология для различных состояний фотона. Фотон в состоянии с моментом j и четностью $(-1)^j$ называют *электрическим* 2^j*-польным* (или Ej-фотоном), а при четности $(-1)^{j+1}$ — *магнитным* 2^j*-польным* (или Mj-фотоном). Так, электрическому дипольному фотону отвечает нечетное со-

---

[1]) Действительно, когда говорят о характере преобразования величины при вращении, речь идет о преобразовании в данной точке, т. е. при заданном $\mathbf{k}$. При таком преобразовании $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$ вообще не меняется, т. е. ведет себя как скаляр.

[2]) Подчеркнем лишний раз, что здесь не имеется в виду состояние какой-либо реальной частицы. Производимый подсчет имеет формальный характер и сводится, с математической точки зрения, к классификации всей совокупности преобразующихся друг через друга величин по неприводимым представлениям группы вращения.

стояние с $j=1$, электрическому квадрупольному — четное состояние с $j=2$, магнитному дипольному — четное состояние с $j=1$ [1]).

§ 7. Сферические волны фотонов

Определив возможные значения момента фотона, мы должны теперь найти соответствующие им волновые функции [2]).

Рассмотрим сначала формальную задачу: определить такие векторные функции, которые являлись бы собственными функциями операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$; при этом мы не предрешаем заранее, какие именно из этих функций входят в интересующие нас волновые функции фотона, и не учитываем условия поперечности.

Будем искать функции в импульсном представлении. Оператор координат в этом представлении $\hat{\mathbf{r}}=i\partial/\partial\mathbf{k}$ (см. III (15,12)). Оператор же орбитального момента

$$\hat{\mathbf{l}}=[\hat{\mathbf{r}}\mathbf{k}]=-i\left[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right],$$

т. е. отличается от оператора момента в координатном представлении лишь заменой буквы $\mathbf{r}$ на $\mathbf{k}$. Поэтому решение поставленной задачи в обоих представлениях формально одинаково.

Обозначим искомые собственные функции посредством $\mathbf{Y}_{jm}$ и будем называть их *шаровыми векторами*. Они должны удовлетворять уравнениям

$$\hat{\mathbf{j}}^2\mathbf{Y}_{jm}=j(j+1)\mathbf{Y}_{jm},\quad \hat{j}_z\mathbf{Y}_{jm}=m\mathbf{Y}_{jm} \tag{7,1}$$

(ось z — заданное направление в пространстве). Покажем, что этим свойством обладает любая функция вида $\mathbf{a}Y_{jm}$, где $\mathbf{a}$ — какой-либо вектор, образованный с помощью единичного вектора $\mathbf{n}=\mathbf{k}/\omega$, а Y_{jm} — обычные (скалярные) шаровые функции. Последние будем везде определять согласно III, § 28:

$$Y_{lm}(\mathbf{n})=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}i^l\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{7,2}$$

(θ, φ — сферические углы, определяющие направление $\mathbf{n}$) [3]).

---

[1]) Эти названия соответствуют терминологии классической теории излучения: мы увидим в дальнейшем (§ 46, 47), что излучение фотонов электрического и магнитного типов определяется соответствующими электрическими и магнитными моментами системы зарядов.

[2]) Этот вопрос был впервые рассмотрен *Гайтлером* (*W. Heitler*, 1936). Излагаемая форма решения принадлежит *В. Б. Берестецкому* (1947).

[3]) Отметим для будущих ссылок значение функций при $\theta=0$ ($\mathbf{n}$ — вдоль оси z):

$$Y_{lm}(\mathbf{n}_z)=i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}. \tag{7,2a}$$