стояние с $j=1$, электрическому квадрупольному — четное состояние с $j=2$, магнитному дипольному — четное состояние с $j=1$[1]).

§ 7. Сферические волны фотонов

Определив возможные значения момента фотона, мы должны теперь найти соответствующие им волновые функции[2]).

Рассмотрим сначала формальную задачу: определить такие векторные функции, которые являлись бы собственными функциями операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$; при этом мы не предрешаем заранее, какие именно из этих функций входят в интересующие нас волновые функции фотона, и не учитываем условия поперечности.

Будем искать функции в импульсном представлении. Оператор координат в этом представлении $\hat{\mathbf{r}} = i\partial/\partial\mathbf{k}$ (см. III (15,12)). Оператор же орбитального момента

$$\hat{\mathbf{l}} = [\hat{\mathbf{r}}\mathbf{k}] = -i\left[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right],$$

т. е. отличается от оператора момента в координатном представлении лишь заменой буквы $\mathbf{r}$ на $\mathbf{k}$. Поэтому решение поставленной задачи в обоих представлениях формально одинаково.

Обозначим искомые собственные функции посредством $\mathbf{Y}_{jm}$ и будем называть их *шаровыми векторами*. Они должны удовлетворять уравнениям

$$\hat{\mathbf{j}}^2\mathbf{Y}_{jm} = j(j+1)\,\mathbf{Y}_{jm}, \quad \hat{j}_z\mathbf{Y}_{jm} = m\mathbf{Y}_{jm} \tag{7,1}$$

(ось z — заданное направление в пространстве). Покажем, что этим свойством обладает любая функция вида $\mathbf{a}Y_{jm}$, где $\mathbf{a}$ — какой-либо вектор, образованный с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а Y_{jm} — обычные (скалярные) шаровые функции. Последние будем везде определять согласно III, § 28:

$$Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \tag{7,2}$$

(θ, φ — сферические углы, определяющие направление $\mathbf{n}$)[3]).

---

[1]) Эти названия соответствуют терминологии классической теории излучения: мы увидим в дальнейшем (§ 46, 47), что излучение фотонов электрического и магнитного типов определяется соответствующими электрическими и магнитными моментами системы зарядов.

[2]) Этот вопрос был впервые рассмотрен *Гайтлером* (*W. Heitler*, 1936). Излагаемая форма решения принадлежит *В. Б. Берестецкому* (1947).

[3]) Отметим для будущих ссылок значение функций при $\theta = 0$ ($\mathbf{n}$ — вдоль оси z):

$$Y_{lm}(\mathbf{n}_z) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}. \tag{7,2a}$$

Для этого вспомним правило коммутации III (29,4):

$$\{\hat{l}_i,\ a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

Правую сторону этого равенства можно написать в виде $(-\hat{s}_i a_k)$, где $\hat{\mathbf{s}}$ — оператор спина 1 (воздействие этого оператора на векторную функцию как раз определяется равенством $\hat{s}_i a_k = -ie_{ikl}a_l$; см. III, § 57, задача 2). Поэтому имеем

$$\hat{l}_i a_k - a_k \hat{l}_i = -\hat{s}_i a_k.$$

Воспользовавшись этим равенством, найдем

$$\hat{j}_i a_k = (\hat{l}_i + \hat{s}_i)\, a_k = a_k \hat{l}_i.$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{j}}^2(\mathbf{a}Y_{jm}) = \mathbf{a}\hat{\mathbf{l}}^2 Y_{jm}, \quad \hat{j}_z(\mathbf{a}Y_{jm}) = \mathbf{a}\hat{l}_z Y_{jm}.$$

Но шаровая функция Y_{jm} есть собственная функция операторов $\hat{\mathbf{l}}^2$ и $\hat{l}_z$, соответствующая собственным значениям этих величин $j(j+1)$ и m, так что мы приходим к равенствам (7,1).

Мы получим три существенно различных типа шаровых векторов, выбирая в качестве вектора $\mathbf{a}$ один из следующих векторов[1]:

$$\frac{\nabla_{\mathbf{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{[\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{n}}]}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \mathbf{n}. \tag{7,3}$$

Таким образом, определяем шаровые векторы следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{jm}^{(э)} &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\nabla_{\mathbf{n}} Y_{jm}, & P &= (-1)^j;\\
\mathbf{Y}_{jm}^{(м)} &= [\mathbf{n}\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}], & P &= (-1)^{j+1};\\
\mathbf{Y}_{jm}^{(п)} &= \mathbf{n}Y_{jm}, & P &= (-1)^j.
\end{aligned} \tag{7,4}$$

Рядом с каждым вектором указана его четность P. Шаровые векторы трех типов взаимно ортогональны, причем $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$ — продолен, а $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$ — поперечны по отношению к $\mathbf{n}$.

[1]) Оператор $\nabla_{\mathbf{n}} \equiv |\mathbf{k}|\nabla_{\mathbf{k}}$ и действует на функции, зависящие только от направления $\mathbf{n}$. Он имеет (в сферических координатах) всего две составляющие:

$$\nabla_{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Оператор, обозначенный ниже посредством $\Delta_{\mathbf{n}}$, — угловая часть оператора Лапласа:

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Шаровые векторы могут быть выражены через скалярные шаровые функции. При этом $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$ выражаются через шаровые функции лишь одного порядка $l=j$, а $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$ — через шаровые функции порядков $l=j\pm 1$. Это обстоятельство очевидно: достаточно сравнить указанные в (7,4) четности шаровых векторов с четностью $(-1)^{l+1}$ векторного поля, выраженной через порядок содержащихся в нем шаровых функций.

Шаровые векторы каждого из типов взаимно ортогональны и нормированы согласно

$$\int \mathbf{Y}_{jm}\mathbf{Y}_{j'm'}^{*}\,do=\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7,5}$$

Для векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$ это очевидно в силу условия нормировки шаровых функций Y_{jm}. Для векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$ нормировочный интеграл

$$\frac{1}{j(j+1)}\int \nabla_{n}Y_{jm}\nabla_{n}Y_{j'm'}^{*}\,do=-\frac{1}{j(j+1)}\int Y_{j'm'}^{*}\Delta_{n}Y_{jm}\,do,$$

и, поскольку $\Delta_{n}Y_{jm}=-j(j+1)Y_{jm}$, то мы приходим к (7,5). К такому же интегралу сводится нормировка векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$.

Заметим, что к шаровым векторам (7,4) можно было бы прийти и без произведенной выше прямой проверки уравнений (7,1) — уже на основании общих соображений о трансформационных свойствах функций. Такие соображения привели нас в предыдущем параграфе к выводу о том, что векторная функция вида $\mathbf{n}\varphi$ отвечает значению j момента, совпадающему с порядком шаровых функций, входящих в φ; если положить просто $\varphi=Y_{jm}$, то функция $\mathbf{n}\varphi$ будет соответствовать также и определенному значению m проекции момента. Таким образом, мы сразу приходим к шаровым векторам $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$. Но изложенные в § 6 рассуждения о трансформационных свойствах не изменятся, если заменить множитель $\mathbf{n}$ в произведении $\mathbf{n}\varphi$ вектором ∇_n или $[\mathbf{n}\nabla_n]$; таким образом, мы получим шаровые векторы двух других типов.

Вернемся к волновым функциям фотона. Для фотона электрического типа (Ej) вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ должен обладать четностью $(-1)^{j}$. Такую четность имеют шаровые векторы $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$; из них, однако, лишь первый удовлетворяет условию поперечности. Для фотона магнитного типа (Mj) вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ должен иметь четность $(-1)^{j+1}$; такую четность имеет только шаровой вектор $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$. Поэтому волновые функции фотона с определенным моментом j и его проекций m (и энергией ω)

$$\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k})=\frac{4\pi^{2}}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\mathbf{k}|-\omega)\,\mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}), \tag{7,6}$$

причем в качестве $\mathbf{Y}_{jm}$ надо писать $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$ или $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$ соответственно в случае фотона электрического или магнитного типа; заданное значение энергии учитывается множителем $\delta(|\mathbf{k}|-\omega)$.

Функции (7,6) нормированы условием

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \omega\omega' \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{k})\,\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k})\,d^3k = \omega\delta(\omega'-\omega)\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7,7}$$

Для волновых функций координатного представления условие (7,7) эквивалентно условию [1])

$$\frac{1}{4\pi}\int \{\mathbf{E}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\omega jm}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\mathbf{H}_{\omega jm}(\mathbf{r})\}\,d^3x = \omega\delta(\omega'-\omega)\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7,8}$$

Действительно, интеграл в левой стороне равенства, выраженный через потенциалы, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\,\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r})\,\omega'\omega\,d^3x.$$

Сюда надо подставить

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{kr}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \\ \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{k}')\,e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\,\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \tag{7,9}$$

После этого интегрирование по d^3x дает δ-функцию $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$, которая устраняется интегрированием по d^3k', и интеграл приводится к виду (7,7).

До сих пор мы подразумевали поперечную калибровку потенциалов, при которой скалярный потенциал $\Phi=0$. В различных применениях, однако, могут оказаться более удобными другие способы калибровки сферической волны.

Допустимое преобразование потенциалов в импульсном представлении состоит в замене

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\mathbf{n}f(\mathbf{k}),\qquad \Phi\to\Phi+f(\mathbf{k}),$$

где $f(\mathbf{k})$ — произвольная функция. Выберем ее в данном случае таким образом, чтобы новые потенциалы выражались через те же шаровые функции и чтобы они по-прежнему имели определенную четность. Для фотона электрического типа эти условия

[1]) Это условие того же типа, что и (2,22). Появление множителя $\delta(\omega'-\omega)$ в правой стороне равенства связано с тем, что здесь рассматривается поле (сферическая волна) во всем бесконечном пространстве вместо поля в конечном объеме $V=1$.

ограничивают выбор потенциалов следующими функциями:

$$\mathbf{A}^{(э)}_{\omega jm}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}|-\omega)\left(\mathbf{Y}^{(э)}_{jm} + C\mathbf{n}Y_{jm}\right),$$
$$\Phi^{(э)}_{\omega jm}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}|-\omega)CY_{jm}, \tag{7,10}$$

где C — произвольная постоянная. Для фотона же магнитного типа такая добавка к $\mathbf{A}^{(м)}(\mathbf{k})$ лишала бы его определенной четности, и поэтому при тех же условиях выбор (7,6) оказывается однозначным.

Вероятность того, что фотон с определенными моментом и четностью будет зарегистрирован движущимся в направлении $\mathbf{n}$, лежащем в элементе телесного угла do, согласно (3,5) и (7,6) равна

$$w(\mathbf{n})\,do = |\mathbf{Y}^{(э)}_{jm}(\mathbf{n})|^2\,do. \tag{7,11}$$

Мы написали выражение для фотона E-типа. Но поскольку $|\mathbf{Y}^{(м)}_{jm}|^2 = |\mathbf{Y}^{(э)}_{jm}|^2$, распределения вероятностей $w(\mathbf{n})$ для фотонов обоих типов одинаковы.

Квадрат модуля $|\mathbf{Y}^{(э)}_{jm}|^2$ не зависит от азимутального угла φ (множители $e^{\pm im\varphi}$ в шаровых функциях сокращаются). Поэтому распределение вероятностей $w(\mathbf{n})$ симметрично относительно оси z. Далее, поскольку каждый из шаровых векторов обладает определенной четностью, квадраты их модулей четны по отношению к инверсии, т. е. по отношению к замене полярного угла $\theta \to \pi - \theta$; это значит, что функция $w(\theta)$, будучи разложена по полиномам Лежандра, содержит полиномы лишь четного порядка. Определение коэффициентов такого разложения сводится к вычислению интегралов от произведений трех шаровых функций и дальнейшему суммированию по компонентам. То и другое производится по формулам, полученным в III, § 107—108, и приводит к следующему результату:

$$w(\theta) = (-1)^{m+1}\frac{(2j+1)^2}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ m & -m & 0\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} j & j & 1 \\ j & j & 2n\end{Bmatrix}P_{2n}(\cos\theta). \tag{7,12}$$

Приведем, наконец, выражения компонент шаровых векторов в виде разложений по шаровым функциям. При этом мы пользуемся «сферическими компонентами» вектора, определенными согласно III, § 107; компоненты f_λ вектора $\mathbf{f}$:

$$f_0 = if_z,\quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x + if_y),\quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x - if_y). \tag{7,13}$$

Если ввести «циркулярные орты»:

$$\mathbf{e}^{(0)}=i\mathbf{e}^{(z)},\quad \mathbf{e}^{(+1)}=-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)}+i\mathbf{e}^{(y)}\right),\quad \mathbf{e}^{(-1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)}-i\mathbf{e}^{(y)}\right) \quad (7,14)$$

($\mathbf{e}^{(x,\,y,\,z)}$ — орты осей x, y, z), то

$$\mathbf{f}=\sum_{\lambda}(-1)^{1-\lambda}f_{-\lambda}\mathbf{e}^{(\lambda)},\qquad f_{\lambda}=(-1)^{1-\lambda}\mathbf{f}\mathbf{e}^{(-\lambda)*}=\mathbf{f}\mathbf{e}^{(\lambda)}. \quad (7,15)$$

Сферические компоненты шаровых векторов выражаются с помощью $3j$-символов через шаровые функции следующими формулами:

$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(э)}_{jm}\right)_{\lambda}=-\sqrt{j}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j\\ m+\lambda & -\lambda & -m\end{pmatrix}Y_{j+1,\,m+\lambda}+ \\ +\sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j\\ m+\lambda & -\lambda & -m\end{pmatrix}Y_{j-1,\,m+\lambda},$$

$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(м)}_{jm}\right)_{\lambda}=-\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j & 1 & j\\ m+\lambda & -\lambda & -m\end{pmatrix}Y_{j,\,m+\lambda}, \quad (7,16)$$

$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(п)}_{jm}\right)_{\lambda}=\sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j\\ m+\lambda & -\lambda & -m\end{pmatrix}Y_{j+1,\,m+\lambda}+ \\ +\sqrt{j}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j\\ m+\lambda & -\lambda & -m\end{pmatrix}Y_{j-1,\,m+\lambda}.$$

Эти формулы выводятся следующим образом. Каждый из трех шаровых векторов имеет вид $\mathbf{Y}_{jm}=\mathbf{a}Y_{jm}$, где $\mathbf{a}$ — один из трех векторов (7,3). Поэтому

$$\mathbf{Y}_{jm}=\sum_{lm'}\langle lm'|\,\mathbf{a}\,|jm\rangle Y_{lm'},$$

и задача сводится к нахождению матричных элементов векторов $\mathbf{a}$ относительно собственных функций орбитального момента. Согласно III (107,6) имеем

$$\langle lm'|\,a_{\lambda}\,|jm\rangle=i(-1)^{j_{\max}-m'}\begin{pmatrix} l & 1 & j\\ -m' & \lambda & m\end{pmatrix}\langle l\|a\|j\rangle,$$

где $j_{\max}$ — большее из чисел l и j. Поэтому достаточно знать отличные от нуля приведенные матричные элементы $\langle l\|a\|j\rangle$. Для них имеются формулы:

$$\begin{aligned}
&\langle l-1\|n\|l\rangle=\langle l\|n\|l-1\rangle^{*}=i\sqrt{l},\\
&\langle l\|\nabla_{\mathbf{n}}\|l-1\rangle=i(l-1)\sqrt{l},\\
&\langle l-1\|\nabla_{\mathbf{n}}\|l\rangle=i(l+1)\sqrt{l},\\
&\langle l\|[\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{n}}]\|l\rangle=i\sqrt{l(l+1)(2l+1)}.
\end{aligned} \quad (7,17)$$