§ 8. Поляризация фотона

Вектор поляризации $\mathbf{e}$ играет для фотона роль «спиновой части» волновой функции (с теми оговорками, которые были высказаны в § 6 по поводу понятия спина фотона).

Различные случаи, которые могут иметь место для поляризации фотона, ничем не отличаются от возможных типов поляризации классической электромагнитной волны (см. II, § 48).

Произвольную поляризацию $\mathbf{e}$ можно представить в виде наложения двух выбранных каким-либо определенным образом взаимно ортогональных поляризаций $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ ($\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)*} = 0$). В разложении

$$\mathbf{e} = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)} \tag{8,1}$$

квадраты модулей коэффициентов e_1 и e_2 определяют вероятность того, что фотон имеет поляризацию $\mathbf{e}^{(1)}$ или $\mathbf{e}^{(2)}$.

В качестве последних можно выбрать две взаимно перпендикулярные линейные поляризации. Можно также разлагать произвольную поляризацию на две круговые с противоположными направлениями вращения. Векторы правой и левой круговой поляризации обозначим соответственно $\mathbf{e}^{(+1)}$ и $\mathbf{e}^{(-1)}$; в системе координат $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль направления фотона $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(\xi)} + i\mathbf{e}^{(\eta)}), \quad \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(\xi)} - i\mathbf{e}^{(\eta)}). \tag{8,2}$$

Возможность двух различных поляризаций фотона (при заданном импульсе) означает, другими словами, что каждое собственное значение импульса двукратно вырождено. Это обстоятельство тесно связано с равенством массы фотона нулю.

Для свободно движущейся частицы с ненулевой массой всегда существует система покоя. Очевидно, что именно в этой системе отсчета выявляются собственные свойства симметрии частицы как таковой. При этом должна рассматриваться симметрия по отношению ко всем возможным поворотам вокруг центра (т. е. по отношению ко всей группе сферической симметрии). Характеристикой свойств симметрии частицы по отношению к этой группе является ее спин s, определяющий кратность вырождения (число $2s + 1$ преобразующихся друг через друга различных волновых функций). В частности, частице с векторной (три компоненты) волновой функцией отвечает спин 1.

Для частицы же с равной нулю массой не существует системы покоя — в любой системе отсчета она движется со скоростью света. По отношению к такой частице всегда имеется выделенное направление в пространстве—направление вектора импульса $\mathbf{k}$ (ось ζ). Ясно, что в таком случае отсутствует симметрия по отношению ко всей группе трехмерных вращений, и можно говорить лишь об аксиальной симметрии относительно выделенной оси.

При аксиальной симметрии сохраняется лишь *спиральность* частицы — проекция момента на ось ζ; обозначим ее λ[1]). Если потребовать также симметрии по отношению к отражениям в плоскостях, проходящих через ось ζ, то состояния, различающиеся знаком λ, будут взаимно вырождены; при $\lambda \neq 0$ мы будем иметь, следовательно, двукратное вырождение[2]). Состояние фотона с определенным импульсом и соответствует одному из типов таких двукратно вырожденных состояний. Оно описывается «спиновой» волновой функцией, представляющей собой вектор $\mathbf{e}$ в плоскости $\xi\eta$; две компоненты этого вектора преобразуются друг через друга при всех поворотах вокруг оси ζ и при отражениях в плоскостях, проходящих через эту ось.

Различные случаи поляризации фотона находятся в определенном соответствии с возможными значениями его спиральности. Это соответствие можно установить по формулам III (57,9), связывающим компоненты векторной волновой функции с компонентами эквивалентного ей спинора второго ранга[3]). Проекциям $\lambda = +1$ или -1 соответствуют векторы $\mathbf{e}$ с отличной от нуля лишь компонентой $e_\xi - ie_\eta$ или $e_\xi + ie_\eta$, т. е. соответственно $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(+1)}$ или $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(-1)}$. Другими словами, значения $\lambda = +1$ и -1 соответствуют правой и левой круговой поляризации фотона (в § 16 этот же результат будет получен путем прямого вычисления собственных функций оператора проекции спина).

Таким образом, проекция момента фотона на направление его движения может иметь лишь два значения (± 1); значение 0 не возможно.

Состояние фотона с определенными импульсом и поляризацией есть чистое состояние (в смысле, разъясненном в III, § 14); оно описывается волновой функцией и соответствует полному квантовомеханическому описанию состояния частицы (фотона). Возможны также и «смешанные» состояния фотона, соответствующие менее полному описанию, осуществляемому не волновой функцией, а лишь матрицей плотности.

Рассмотрим состояние фотона, смешанное по его поляризации, но соответствующее определенному значению импульса $\mathbf{k}$. В таком состоянии (его называют состоянием *частичной поляризации*) существует «координатная» волновая функция.

---

[1]) В отличие от проекции m момента на заданное направление (ось z) в пространстве, о которой шла речь в предыдущем параграфе.

[2]) Отметим, что таким же образом классифицируются электронные термы двухатомной молекулы (см. III, § 78).

[3]) Напомним, что компонентам волновой функции как амплитудам вероятности различных значений проекции момента частицы (о которых здесь и идет речь) отвечают контравариантные компоненты спинора.

Поляризационная матрица плотности фотона представляет собой тензор второго ранга $\rho_{\alpha\beta}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$ (плоскость $\xi\eta$; индексы α, β пробегают всего два значения). Этот тензор эрмитов:

$$\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\beta\alpha}, \tag{8,3}$$

и нормирован условием

$$\rho_{\alpha\alpha}\equiv\rho_{11}+\rho_{22}=1. \tag{8,4}$$

В силу (8,3) диагональные компоненты ρ_{11} и ρ_{22} вещественны, причем определяются одна по другой условием (8,4). Компонента же ρ_{12} комплексна, а $\rho_{21}=\rho^*_{12}$. Всего, следовательно, матрица плотности характеризуется тремя вещественными параметрами.

Если известна поляризационная матрица плотности, то можно найти вероятность того, что фотон имеет любую определенную поляризацию $\mathbf{e}$. Эта вероятность определяется «проекцией» тензора $\rho_{\alpha\beta}$ на направление вектора $\mathbf{e}$, т. е. величиной

$$\rho_{\alpha\beta}e^*_\alpha e_\beta. \tag{8,5}$$

Так, компоненты ρ_{11} и ρ_{22} представляют собой вероятности линейных поляризаций вдоль осей ξ и η. Проецирование на векторы (8,2) дает вероятности двух круговых поляризаций:

$$\frac{1}{2}[1\pm i(\rho_{12}-\rho_{21})]. \tag{8,6}$$

Свойства тензора $\rho_{\alpha\beta}$ по форме и по существу совпадают со свойствами тензора $J_{\alpha\beta}$, описывающего частично поляризованный свет в классической теории (см. II, § 50). Напомним здесь некоторые из этих свойств.

В случае чистого состояния с определенной поляризацией $\mathbf{e}$ тензор $\rho_{\alpha\beta}$ сводится к произведениям компонент вектора $\mathbf{e}$:

$$\rho_{\alpha\beta}=e_\alpha e^*_\beta. \tag{8,7}$$

При этом определитель $|\rho_{\alpha\beta}|=0$. В обратном случае неполяризованного фотона все направления поляризации равновероятны, т. е.

$$\rho_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}/2, \tag{8,8}$$

при этом $|\rho_{\alpha\beta}|=1/4$.

В общем случае частичную поляризацию удобно описывать с помощью трех вещественных параметров Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 [1]), через которые матрица плотности выражается в виде

$$\rho_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\xi_3 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & 1-\xi_3\end{pmatrix}. \tag{8,9}$$

1) Не смешивать обозначение параметров с обозначением оси ξ!

Все три параметра пробегают значения между -1 и $+1$. В неполяризованном состоянии $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; для полностью поляризованного фотона $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей ξ или η; вероятность линейной поляризации фотона вдоль этих осей равна соответственно $(1+\xi_3)/2$ или $(1-\xi_3)/2$. Значения $\xi_3 = +1$ или -1 отвечают поэтому полной поляризации в этих направлениях.

Параметр ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих угол $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = -\pi/4$ с осью ξ. Вероятность линейной поляризации фотона в этих направлениях равна соответственно $(1+\xi_1)/2$ или $(1-\xi_1)/2$; в этом легко убедиться, спроецировав тензор $\rho_{\alpha\beta}$ на направления $\mathbf{e} = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$.

Наконец, параметр ξ_2 есть степень круговой поляризации; согласно (8,6) вероятность того, что фотон имеет правую или левую круговую поляризацию, равна $(1+\xi_2)/2$ или $(1-\xi_2)/2$. Поскольку две поляризации отвечают спиральностям $\lambda = \pm 1$, то ясно, что в общем случае ξ_2 есть среднее значение спиральности фотона. Отметим также, что в случае чистого состояния с поляризацией $\mathbf{e}$

$$\xi_2 = i\,[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\,\mathbf{n}. \tag{8,10}$$

Напомним (см. II, § 50), что по отношению к преобразованиям Лоренца инвариантными величинами являются ξ_2 и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$.

Мы встретимся также в дальнейшем с вопросом о поведении параметров Стокса по отношению к операции обращения времени. Легко видеть, что они инвариантны по отношению к этому преобразованию. Это свойство не зависит, очевидно, от природы поляризационного состояния, и потому достаточно убедиться в нем хотя бы в случае чистого состояния. Обращению времени отвечает в квантовой механике замена волновой функции ее комплексно-сопряженной (см. III, § 18). Для плоскополяризованной волны это означает замену [1])

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}, \quad \mathbf{e} \to -\mathbf{e}^*. \tag{8,11}$$

[1]) Дополнительное изменение знака $\mathbf{e}$ связано с тем, что обращение времени меняет знак векторного потенциала электромагнитного поля. Скалярный же потенциал не меняет знака; поэтому для 4-вектора e обращение времени есть преобразование

$$(e_0, \mathbf{e}) \to (e_0^*, -\mathbf{e}^*). \tag{8,11a}$$

При таком преобразовании симметричная часть матрицы плотности

$$\frac{1}{2}\left(e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*\right),$$

а тем самым и параметры ξ_1 и ξ_3 не меняются. Неизменность же параметра ξ_2 при том же преобразовании видна из (8,10); она очевидна также уже из смысла ξ_2 как среднего значения спиральности. Действительно, спиральность есть проекция момента $\mathbf{j}$ на направление $\mathbf{n}$, т. е. произведение $\mathbf{jn}$; обращение же времени меняет знак обоих этих векторов.

В дальнейших вычислениях нам понадобится матрица плотности фотона, записанная в четырехмерной форме, т. е. в виде некоторого 4-тензора $\rho_{\mu\nu}$. Для поляризованного фотона, описываемого 4-вектором e_μ, этот тензор естественно определить как

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^*. \tag{8,12}$$

При трехмерно поперечной калибровке $e = (0, \mathbf{e})$, если одна из пространственных осей координат выбрана вдоль $\mathbf{n}$, отличные от нуля компоненты этого 4-тензора совпадают с (8,7).

Для неполяризованного фотона трехмерно поперечной калибровке отвечает тензор $\rho_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik} - n_i n_k\right), \qquad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \tag{8,13}$$

(если одна из осей совпадает с направлением $\mathbf{n}$, мы возвращаемся к (8.8)). Непосредственно использовать тензор $\rho_{\mu\nu}$ в таком трехмерном виде, однако, неудобно. Но мы можем воспользоваться калибровочным преобразованием; для матрицы плотности это есть преобразование вида

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{8,14}$$

где χ_μ — произвольные функции. Положив

$$\chi_0 = -\frac{1}{4\omega}, \qquad \chi_i = \frac{k_i}{4\omega^2},$$

получим вместо (8,13) простое четырехмерное выражение

$$\rho_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/2. \tag{8,15}$$

Четырехмерное представление матрицы плотности частично поляризованного фотона легко получить, переписав предварительно двумерный тензор (8,9) в трехмерном виде:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}\left(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}\right) + \frac{\xi_1}{2}\left(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)}\right) -$$
$$- \frac{i\xi_2}{2}\left(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}\right) + \frac{\xi_3}{2}\left(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}\right),$$

где $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ — единичные векторы, орты осей ξ и η. Требуемое обобщение достигается заменой этих 3-векторов пространственно-подобными единичными вещественными 4-векторами $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ортогональными друг другу и 4-импульсу фотона k:

$$e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \quad e^{(1)}e^{(2)} = 0, \quad e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0. \tag{8,16}$$

В трехмерно поперечной калибровке: $e^{(1)} = (0, \mathbf{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \mathbf{e}^{(2)})$. Таким образом, четырехмерная матрица плотности фотона

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}\right) + \frac{\xi_1}{2}\left(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}\right) - \\ - \frac{i\xi_2}{2}\left(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}\right) + \frac{\xi_3}{2}\left(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}\right). \tag{8,17}$$

Удобство того или иного фактического выбора 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи.

Надо иметь в виду, что условия (8,16) не фиксируют выбора $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ однозначным образом. Если какой-либо 4-вектор e_μ удовлетворяет этим условиям, то им же будет удовлетворять и любой 4-вектор вида $e_\mu + \chi k_\mu$ (в силу того, что $k^2 = 0$). Эта неоднозначность связана с калибровочной неоднозначностью матрицы плотности.

Первый член в (8,17) отвечает неполяризованному состоянию. Поэтому его можно было бы заменить, согласно (8,15), на $-g_{\mu\nu}/2$. Такая замена снова эквивалентна некоторому калибровочному преобразованию.

При оперировании с 4-тензорами вида (8,17), разложенными по двум независимым 4-векторам, удобно применять следующий формальный прием. Записав тензор (8,17) в виде

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,\, b=1}^{3} \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)},$$

представим коэффициенты $\rho^{(ab)}$ двухрядной матрицей

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Как всякую эрмитову двухрядную матрицу, ее можно разложить по четырем независимым двухрядным матрицам — матрицам Паули σ_x, σ_y, σ_z и единичной матрице 1. Такое разложение имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{8,18}$$

в чем легко убедиться прямым сравнением с (8,17), использовав известные выражения матриц Паули (18,5) (объединение трех величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 в «вектор» ξ имеет, конечно, чисто формальный смысл, преследующий лишь цель удобства записи).

Задача

Написать матрицу плотности фотона в представлении, в котором «осями» координат являются циркулярные орты (8,2).

Решение. Компоненты тензора $\rho'_{\alpha\beta}$ в новых осях (α, $\beta = \pm 1$) получаются проецированием тензора (8,9) на орты (8,2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(+1)}, \quad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(-1)}, \quad \ldots,$$

$$\rho' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3 + i\xi_1 \\ -\xi_3 - i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}.$$

§ 9. Система двух фотонов

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 6, позволяют произвести подсчет числа возможных состояний и в более сложном случае системы двух фотонов (*Л. Ландау*, 1948).

Будем рассматривать фотоны в системе их центра инерции; импульсы фотонов $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}$ [1]). Волновую функцию системы двух фотонов (в импульсном представлении) можно представить в виде трехмерного тензора второго ранга $A_{ik}(\mathbf{n})$, составленного билинейно из компонент векторных волновых функций обоих фотонов; каждый из индексов этого тензора соответствует одному из фотонов ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Поперечность же каждого из фотонов выражается ортогональностью тензора A_{ik} вектору $\mathbf{n}$:

$$A_{il} n_l = 0, \quad A_{lk} n_l = 0. \tag{9,1}$$

Взаимная перестановка фотонов означает перестановку индексов тензора A_{ik} вместе с одновременным изменением знака $\mathbf{n}$. Поскольку фотоны подчиняются статистике Бозе, то

$$A_{ik}(-\mathbf{n}) = A_{ki}(\mathbf{n}). \tag{9,2}$$

Тензор A_{ik}, вообще говоря, не симметричен по своим индексам. Разделим его на симметричную (s_{ik}) и антисимметричную (a_{ik}) части: $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. Соотношению (9,2) (а также условиям ортогональности (9,1)) должна, очевидно, удовлетворять каждая из этих частей в отдельности. Отсюда получаем

$$s_{ik}(-\mathbf{n}) = s_{ik}(\mathbf{n}), \tag{9,3}$$

$$a_{ik}(-\mathbf{n}) = -a_{ik}(\mathbf{n}). \tag{9,4}$$

---

[1]) Такая система отсчета существует всегда, за исключением случая двух фотонов, движущихся параллельно друг другу в одну и ту же сторону. Суммарный импульс $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и суммарная энергия $\omega_1 + \omega_2$ таких фотонов связаны друг с другом таким же соотношением, как и для одного фотона, и потому не существует системы отсчета, в которой было бы $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$.