величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 в «вектор» ξ имеет, конечно, чисто формальный смысл, преследующий лишь цель удобства записи).

Задача

Написать матрицу плотности фотона в представлении, в котором «осями» координат являются циркулярные орты (8,2).

Решение. Компоненты тензора $\rho'_{\alpha\beta}$ в новых осях (α, $\beta = \pm 1$) получаются проецированием тензора (8,9) на орты (8,2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(+1)}, \qquad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(-1)}, \ \ldots,$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3 + i\xi_1 \\ -\xi_3 - i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}.$$

§ 9. Система двух фотонов

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 6, позволяют произвести подсчет числа возможных состояний и в более сложном случае системы двух фотонов (*Л. Ландау*, 1948).

Будем рассматривать фотоны в системе их центра инерции; импульсы фотонов $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}$ [1]). Волновую функцию системы двух фотонов (в импульсном представлении) можно представить в виде трехмерного тензора второго ранга $A_{ik}(\mathbf{n})$, составленного билинейно из компонент векторных волновых функций обоих фотонов; каждый из индексов этого тензора соответствует одному из фотонов ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Поперечность же каждого из фотонов выражается ортогональностью тензора A_{ik} вектору $\mathbf{n}$:

$$A_{il} n_l = 0, \qquad A_{lk} n_l = 0. \tag{9,1}$$

Взаимная перестановка фотонов означает перестановку индексов тензора A_{ik} вместе с одновременным изменением знака $\mathbf{n}$. Поскольку фотоны подчиняются статистике Бозе, то

$$A_{ik}(-\mathbf{n}) = A_{ki}(\mathbf{n}). \tag{9,2}$$

Тензор A_{ik}, вообще говоря, не симметричен по своим индексам. Разделим его на симметричную (s_{ik}) и антисимметричную (a_{ik}) части: $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. Соотношению (9,2) (а также условиям ортогональности (9,1)) должна, очевидно, удовлетворять каждая из этих частей в отдельности. Отсюда получаем

$$s_{ik}(-\mathbf{n}) = s_{ik}(\mathbf{n}), \tag{9,3}$$

$$a_{ik}(-\mathbf{n}) = -a_{ik}(\mathbf{n}). \tag{9,4}$$

[1]) Такая система отсчета существует всегда, за исключением случая двух фотонов, движущихся параллельно друг другу в одну и ту же сторону. Суммарный импульс $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и суммарная энергия $\omega_1 + \omega_2$ таких фотонов связаны друг с другом таким же соотношением, как и для одного фотона, и потому не существует системы отсчета, в которой было бы $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$.

Инверсия системы координат сама по себе не меняет знака компонент тензора второго ранга, но меняет знак $\mathbf{n}$. Поэтому из (9,3) видно, что волновая функция s_{ik} симметрична по отношению к инверсии, т. е. соответствует четным состояниям системы фотонов; волновая же функция a_{ik} отвечает нечетным состояниям.

Антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору $\mathbf{a}$, компоненты которого выражаются через компоненты тензора согласно $a_i = {}^1/_2 e_{ikl} a_{kl}$, где e_{ikl} — антисимметричный единичный тензор (см. II, § 6). Ортогональность тензора a_{kl} вектору $\mathbf{n}$ означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ параллельны[1]). Поэтому можно написать $\mathbf{a} = \mathbf{n}\varphi(\mathbf{n})$, где φ — скаляр; согласно (9,4) должно быть $\mathbf{a}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{a}(\mathbf{n})$, а потому

$$\varphi(-\mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n}).$$

Это равенство означает, что скаляр φ может быть линейно построен из шаровых функций только четного порядка L (включая порядок нуль).

Мы видим, что антисимметричный тензор a_{ik} по своим трансформационным (по отношению к вращениям) свойствам эквивалентен одному скаляру (ср. примеч. на с. 34). Сопоставив последнему «спин» 0, найдем, что момент состояния $J = L$. Таким образом, тензор a_{ik} соответствует нечетным состояниям системы фотонов с четным моментом J.

Обратимся к симметричному тензору s_{ik}. Поскольку он четен по отношению к изменению знака $\mathbf{n}$, ему отвечают четные состояния системы фотонов. Отсюда же следует, что все компоненты s_{ik} выражаются через шаровые функции четного порядка L (включая $L=0$). Произвольный симметричный тензор второго ранга s_{ik} сводится, как известно, к скаляру (s_{ii}) и к симметричному тензору (s'_{ik}) с равным нулю следом $(s'_{ii}=0)$.

Скаляру s_{ii} приводится в соответствие «спин» 0, а потому момент отвечающих ему состояний $J = L$, т. е. четен. Тензору же s'_{ik} соответствует «спин» 2 (см. III, § 57). Складывая по правилу сложения моментов этот «спин» с четным «орбитальным моментом» L, находим, что при заданном четном $J \neq 0$ возможны три состояния (с $L = J \pm 2$, J), а при нечетном $J \neq 1$ — два состояния (с $L = J \pm 1$). Исключение составляет $J = 0$ с одним состоянием $(L = 2)$ и $J = 1$ с одним состоянием $(L = 2)$.

В этих подсчетах, однако, еще не учтено условие ортогональности тензора s_{ik} вектору $\mathbf{n}$. Поэтому из полученного числа состояний надо вычесть число состояний, которым соответствует

---

[1]) Имеем: $a_{ik} = e_{ikl} a_l$, и условие ортогональности дает

$$a_{ik} n_k = e_{ikl} a_l n_k = [\mathbf{n}\mathbf{a}]_i = 0.$$

симметричный тензор второго ранга, «параллельный» вектору **n**. Такой тензор (обозначим его s''_{ik}) можно представить в виде

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i,$$

где **b** — некоторый вектор. Согласно (9,3) этот вектор должен удовлетворять условию $\mathbf{b}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{b}(\mathbf{n})$. Таким образом, ответственный за «лишние» состояния тензор s''_{ik} эквивалентен нечетному вектору. Этот вектор должен, следовательно, выражаться через шаровые функции только нечетных порядков L. Заметив также, что вектору соответствует «спин» 1, найдем, что для каждого четного момента $J \neq 0$ возможны два состояния (с $L = J \pm 1$), а для каждого нечетного J — одно состояние (с $L = J$); особый случай представляет $J = 0$ с одним состоянием ($L = 1$).

Сведя вместе полученные результаты, получим следующую таблицу, указывающую число возможных четных и нечетных состояний системы из двух фотонов (с равной нулю суммой импульсов) для различных значений полного момента J:

J	Четные	Нечетные
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k+1$	1	—

(9,5)

(k — целое положительное число, отличное от нуля). Мы видим, что при нечетных J отсутствуют нечетные состояния, а значение $J = 1$ вообще невозможно [1]).

Волновая функция системы двух фотонов A_{ik} определяет корреляцию их поляризаций. Вероятность того, что два фотона одновременно имеют определенные поляризации $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, пропорциональна

$$A_{ik} e^*_{1i} e^*_{2k}.$$

Другими словами, если задана поляризация $\mathbf{e}_1$ одного фотона, то поляризация второго $\mathbf{e}_2$ пропорциональна

$$e_{2k} \propto A_{ik} e^*_{1i}. \qquad (9,6)$$

В нечетных состояниях системы A_{ik} совпадает с антисимметричным тензором a_{ik}. При этом

$$\mathbf{e}_2 \mathbf{e}^*_1 \propto a_{ik} e^*_{1i} e^*_{1k} = 0,$$

т. е. поляризации обоих фотонов взаимно ортогональны. В случае линейной поляризации это означает перпендикулярность их

[1]) Другой способ вывода этих результатов — см. задачу 1 к § 69.

направлений, а в случае круговых поляризаций — противоположность направлений вращения.

Четное состояние с $J = 0$ описывается симметричным тензором, сводящимся к скаляру

$$s_{ik} = \mathrm{const} \cdot (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Поэтому из (9,6) получим $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2^*$. В случае линейной поляризации это означает параллельность их направлений, а в случае круговых поляризаций — снова противоположность направлений вращения. Последнее обстоятельство очевидно: при $J = 0$ во всяком случае должна быть равна нулю сумма проекций моментов фотонов на одно и то же направление $\mathbf{k}$ (проекции же на противоположные направления $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, т. е. спиральности, при этом одинаковы).