ГЛАВА II

БОЗОНЫ

§ 10. Волновое уравнение для частиц со спином 0

В гл. I было показано, каким образом можно построить квантовое описание свободного электромагнитного поля, отправляясь при этом от известных свойств поля в классическом пределе и опираясь на представления обычной квантовой механики. Полученная таким образом схема описания поля как системы фотонов несет в себе многие черты, которые переносятся и на релятивистское описание частиц в квантовой теории.

Электромагнитное поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Для нее не существует закона сохранения числа частиц (фотонов), и в ряду его возможных состояний имеются состояния с произвольным числом частиц [1]. Но таким же свойством должны, вообще говоря, обладать в релятивистской теории также и системы любых частиц. Сохранение числа частиц в нерелятивистской теории связано с законом сохранения массы: сумма масс (масс покоя) частиц не меняется при их взаимодействии; сохранение же суммы масс, скажем, в системе электронов означает неизменность также и их числа. В релятивистской же механике закона сохранения массы не существует; должна сохраняться лишь полная энергия системы (включающая в себя также и энергии покоя частиц). Поэтому число частиц уже не должно сохраняться и тем самым всякая релятивистская теория частиц должна быть теорией систем с бесконечным числом степеней свободы. Другими словами, такая теория частиц приобретает характер теории поля.

Адекватным математическим аппаратом для описания систем с переменным числом частиц является аппарат вторичного квантования (см. III, § 64, 65). В квантовом описании электромагнитного поля в роли оператора вторичного квантования выступает 4-потенциал $\hat{A}$. Он выражается через (координатные) волновые функции отдельных частиц (фотонов) и операторы их рождения и уничтожения. Аналогичную роль в описании системы частиц играет оператор квантованной волновой функции. Для его

[1]) Фактически, разумеется, число фотонов меняется лишь в результате различных процессов взаимодействия.

построения надо прежде всего знать вид волновой функции одной свободной частицы и уравнения, которому эта функция подчиняется.

Следует подчеркнуть вспомогательный характер понятия поля свободных частиц. Реальные частицы взаимодействуют, и задача теории состоит в изучении этих взаимодействий. Но всякое взаимодействие сводится к столкновению, до и после которого систему можно рассматривать как совокупность свободных частиц. В § 1 отмечалось, что это — единственно измеримые объекты. Поэтому мы пользуемся полями свободных частиц как средством описания начальных и конечных состояний.

Мы начнем релятивистское описание свободных частиц со случая частиц со спином 0. Математическая простота этого случая позволит наиболее ясно выявить основные идеи и характерные черты такого описания.

Состояние свободной частицы (без спина) может быть полностью определено заданием одного лишь ее импульса $\mathbf{p}$. При этом энергия ε частицы[1]) $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ (где m — масса частицы), или в четырехмерном виде:

$$p^2 = m^2. \qquad (10,1)$$

Как известно, законы сохранения импульса и энергии связаны с однородностью пространства и времени, т. е. с симметрией по отношению к любому параллельному смещению 4-системы координат. В квантовом описании требование этой симметрии означает, что волновая функция частицы с определенным 4-импульсом при указанном преобразовании 4-координат может только умножаться на фазовый множитель (с равным единице модулем). Этому требованию удовлетворяет лишь экспоненциальная функция с линейным по 4-координатам показателем. Другими словами, волновая функция состояния свободной частицы с определенным 4-импульсом $p^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p})$ должна быть плоской волной:

$$\mathrm{const}\cdot e^{-ipx}, \quad px = \varepsilon t - \mathbf{pr} \qquad (10,2)$$

(выбор знака в показателе в релятивистской теории сам по себе условен: он сделан в соответствии с нерелятивистским случаем).

Волновое уравнение должно иметь функции (10,2) в качестве частных решений при произвольном 4-векторе p, удовлетворяющем условию (10,1). Оно должно быть линейным как выражение принципа суперпозиции: любая линейная комбинация функций (10,2) тоже описывает возможное состояние частицы и потому тоже должна быть решением. Наконец, оно должно быть по воз-

[1]) Обозначим энергию отдельной частицы ε в отличие от энергии E системы частиц.

можности более низкого порядка; более высокий порядок внес бы лишние решения.

Спин есть момент частицы в системе отсчета, в которой она покоится. Если спин частицы есть s, то ее волновая функция в системе покоя является трехмерным спинором ранга $2s$. Для описания же частицы в произвольной системе отсчета ее волновая функция должна быть выражена в виде четырехмерных величин.

Частица со спином 0 описывается в системе покоя трехмерным скаляром. Такой скаляр, однако, может иметь различное четырехмерное «происхождение»: это может быть четырехмерный скаляр ψ, но может быть и четвертая компонента 4-вектора ψ_μ (времениподобного), у которого в системе покоя отлична от нуля лишь составляющая ψ_0 [1]).

Для свободной частицы единственный оператор, который может войти в волновое уравнение, — это оператор 4-импульса $\hat{p}$. Его компонентами являются операторы дифференцирования по координатам и времени:

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla\right). \tag{10,3}$$

Волновое уравнение должно представлять собой дифференциальную связь между величинами ψ и ψ_μ, осуществляемую с помощью оператора $\hat{p}$. Эта связь должна, разумеется, выражаться релятивистски инвариантными соотношениями. Таковыми являются

$$m\psi_\mu = \hat{p}_\mu\psi, \qquad \hat{p}^\mu\psi_\mu = m\psi, \tag{10,4}$$

где m — размерная постоянная, характеризующая частицу [2]).

Подставив ψ_μ из первого уравнения во второе, получим

$$(\hat{p}^2 - m^2)\psi = 0 \tag{10,5}$$

(*O. Klein*, *В. А. Фок*, 1926; *W. Gordon*, 1927). В раскрытом виде это уравнение записывается как

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\psi = m^2\psi. \tag{10,6}$$

Подставив в него ψ в виде плоской волны (10,2), получим $p^2 = m^2$, откуда видно, что m — масса частицы. Отметим, что вид уравнения (10,5), конечно, заранее ясен из того, что $\hat{p}^2$ —

---

[1]) Либо, аналогичным образом, временна́я компонента 4-тензора более высокого ранга; этот случай, однако, привел бы к уравнениям более высокого порядка.

[2]) Постоянные m введены в (10,4) так, что ψ_μ и ψ имеют одинаковую размерность. Вводить в этих двух уравнениях различные постоянные m_1 и m_2 было бы бессмысленно, так как их всегда можно было бы сделать одинаковыми путем переопределения ψ или ψ_μ.

единственный скалярный оператор, который можно составить с помощью $\hat{p}$ (по этой причине такому же уравнению удовлетворяет каждая из компонент волновой функции частицы с любым спином — это мы неоднократно увидим в дальнейшем).

Таким образом, частица со спином 0 описывается по существу всего одним (четырехмерным) скаляром ψ, подчиняющимся уравнению второго порядка (10,5). В уравнениях же первого порядка (10,4) роль волновой функции играет совокупность величин ψ и ψ_μ, причем 4-вектор ψ_μ сводится к 4-градиенту скаляра ψ. В системе покоя волновая функция частицы не зависит от координат (пространственных) и поэтому пространственные компоненты 4-вектора ψ_μ обращаются, как и должно быть, в нуль.

Для проведения вторичного квантования полезно выразить энергию и импульс частицы в виде интегралов по пространству от некоторых билинейных (по ψ и ψ^*) комбинаций, представляющих собой как бы пространственную плотность этих величин. Другими словами, надо найти тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, соответствующий уравнению (10,5). С помощью этого тензора закон сохранения энергии и импульса выражается уравнением

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{10,7}$$

Согласно общим правилам теории поля (см. II, § 32), напишем вариационный принцип, следствием которого являлось бы уравнение (10.5). Такой принцип должен заключаться в требовании минимальности «интеграла действия»

$$S = \int L\, d^4x \tag{10,8}$$

от некоторого вещественного 4-скаляра L — плотности лагранжевой функции поля[1]). С помощью скаляра ψ (и оператора ∂^μ) можно составить вещественное билинейное скалярное выражение вида

$$L = \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi, \tag{10,9}$$

где m — размерная постоянная. Рассматривая ψ и ψ^* как независимые переменные, описывающие поле («обобщенные координаты» поля q), легко видеть, что уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{10,10}$$

[1]) Соответствующий вторично квантованный оператор $\hat{L}$ называют *лагранжианом* поля. Для упрощения терминологии будем пользоваться этим термином как для «квантованной», так и для «неквантованной» плотности лагранжевой функции.

($q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q$) действительно совпадают с уравнениями (10,5) для ψ и ψ^*, причем m — масса частицы. Отметим также, что выражение (10,9) написано с таким общим знаком, чтобы квадрат производной по времени, $|\partial\psi/\partial t|^2$, входил в L со знаком плюс; в противном случае действие не могло бы иметь минимума (ср. II, § 27). Выбор же общего числового коэффициента в L условен (и отражается лишь на нормировочном коэффициенте в ψ).

Тензор энергии-импульса вычисляется теперь по формуле

$$T_\mu^\nu = \sum q_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}} - L\delta_\mu^\nu \qquad (10,11)$$

(суммирование по всем q). Подставив (10,9), получим

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi^* \cdot \partial_\nu\psi + \partial_\nu\psi^* \cdot \partial_\mu\psi - Lg_{\mu\nu} \qquad (10,12)$$

(эти величины, как и следовало, вещественны, что обеспечивается вещественностью L). В частности,

$$T_{00} = 2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + m^2\psi^*\psi, \qquad (10,13)$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \qquad (10,14)$$

4-импульс поля дается интегралом

$$P_\mu = \int T_{\mu 0}\, d^3x, \qquad (10,15)$$

т. е. T_{00} и T_{i0} играют роль плотности энергии и импульса. Отметим, что величина T_{00} существенно положительна.

Формулой (10,13) можно воспользоваться для нормировки волновой функции. Плоская волна, нормированная на одну частицу в объеме $V = 1$, запишется в виде

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}. \qquad (10,16)$$

Действительно, для этой функции $T_{00} = \varepsilon$, так что полная энергия в объеме $V = 1$ совпадает с энергией одной частицы.

Момент импульса, сохранение которого связано с изотропией пространства, тоже может быть выражен в виде пространственного интеграла; однако такое представление момента нам в дальнейшем не понадобится.

Наконец, помимо законов сохранения, связанных непосредственно с пространственно-временной симметрией, уравнения (10,4) допускают еще один закон сохранения. Действительно, легко убедиться, что в силу (10,4) (и таких же уравнений для

ψ^*) имеет место уравнение

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{10,17}$$

где

$$j_\mu = m(\psi^*\psi_\mu + \psi_\mu^*\psi) = i[\psi^*\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\psi^*)\psi]. \tag{10,18}$$

Отсюда видно, что j^μ играет роль 4-вектора плотности тока. При этом (10,17) есть уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения величины

$$Q = \int j_0 d^3x, \tag{10,19}$$

где

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right). \tag{10,20}$$

Обратим внимание на то, что j_0 — не положительно определенная величина. Уже это обстоятельство показывает, что в общем случае ее заведомо нельзя интерпретировать как плотность вероятности пространственной локализации частицы. Смысл выражаемого уравнением (10,17) закона сохранения выяснится в следующем параграфе.

§ 11. Частицы и античастицы

Следуя общим правилам проведения вторичного квантования, мы должны рассмотреть разложение произвольной волновой функции по собственным функциям полного набора возможных состояний свободной частицы, например по плоским волнам ψ_p:

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\psi_p, \quad \psi^* = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^*\psi_p^*.$$

После этого коэффициенты $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^*$ надо было бы понимать как операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ уничтожения и рождения частиц в соответствующих состояниях [1]).

При этом, однако, мы сразу сталкиваемся со следующим новым (по сравнению с нерелятивистской теорией) принципиальным обстоятельством. В плоской волне, являющейся решением уравнения (10,5), энергия ε должна удовлетворять (при заданном импульсе $\mathbf{p}$) лишь условию $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, т. е. может иметь два значения: $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Физическим же смыслом энергии свободной частицы могут, однако, обладать лишь положительные значения ε. Между тем просто опустить отрицательные зна-

---

[1]) Снабжаем ψ-функции индексом 4-импульса p, имея в виду в дальнейшем обозначать функции с «отрицательной частотой» посредством ψ_{-p}. Операторы же $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ снабжаются индексом трехмерного импульса $\mathbf{p}$, полностью определяющего состояние реальной частицы.