ψ^*) имеет место уравнение

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{10,17}$$

где

$$j_\mu = m(\psi^*\psi_\mu + \psi_\mu^*\psi) = i[\psi^*\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\psi^*)\psi]. \tag{10,18}$$

Отсюда видно, что j^μ играет роль 4-вектора плотности тока. При этом (10,17) есть уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения величины

$$Q = \int j_0 d^3x, \tag{10,19}$$

где

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right). \tag{10,20}$$

Обратим внимание на то, что j_0 — не положительно определенная величина. Уже это обстоятельство показывает, что в общем случае ее заведомо нельзя интерпретировать как плотность вероятности пространственной локализации частицы. Смысл выражаемого уравнением (10,17) закона сохранения выяснится в следующем параграфе.

§ 11. Частицы и античастицы

Следуя общим правилам проведения вторичного квантования, мы должны рассмотреть разложение произвольной волновой функции по собственным функциям полного набора возможных состояний свободной частицы, например по плоским волнам ψ_p:

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\psi_p, \quad \psi^* = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^*\psi_p^*.$$

После этого коэффициенты $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^*$ надо было бы понимать как операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ уничтожения и рождения частиц в соответствующих состояниях [1]).

При этом, однако, мы сразу сталкиваемся со следующим новым (по сравнению с нерелятивистской теорией) принципиальным обстоятельством. В плоской волне, являющейся решением уравнения (10,5), энергия ε должна удовлетворять (при заданном импульсе $\mathbf{p}$) лишь условию $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, т. е. может иметь два значения: $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Физическим же смыслом энергии свободной частицы могут, однако, обладать лишь положительные значения ε. Между тем просто опустить отрицательные зна-

---

[1]) Снабжаем ψ-функции индексом 4-импульса p, имея в виду в дальнейшем обозначать функции с «отрицательной частотой» посредством ψ_{-p}. Операторы же $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ снабжаются индексом трехмерного импульса $\mathbf{p}$, полностью определяющего состояние реальной частицы.

чения недопустимо: общее решение волнового уравнения образует лишь суперпозиция всех его независимых частных решений. Это обстоятельство указывает на необходимость некоторого изменения истолкования коэффициентов разложения ψ и ψ^* при вторичном квантовании.

Напишем это разложение в виде

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{i(\mathbf{pr}-\varepsilon t)} + \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{i(\mathbf{pr}+\varepsilon t)}, \qquad (11,1)$$

где в первой сумме стоят нормированные согласно (10,16) плоские волны с положительными, а во второй — с отрицательными «частотами»; ε везде обозначает положительную величину: $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. При вторичном квантовании коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ в первой сумме заменяем обычным образом операторами $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ уничтожения частиц. Во второй же сумме замечаем, что при дальнейшем образовании матричных элементов временная зависимость ее слагаемых будет соответствовать не уничтожению, а рождению частиц; множитель $e^{i\varepsilon t} = (e^{-i\varepsilon t})^*$ отвечает одной лишней частице с энергией ε в конечном состоянии (ср. конец § 2). Соответственно этому коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ заменяем операторами $\hat{b}_{-\mathbf{p}}^{+}$ рождения некоторых других частиц. Заменив также во второй сумме в (11,1) обозначение переменной суммирования $\mathbf{p}$ на $-\mathbf{p}$ (чтобы экспоненциальный множитель приобрел вид $e^{-i(\mathbf{pr}-\varepsilon t)}$), получим ψ-операторы в виде

$$\hat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx}\right), \quad \hat{\psi}^{+} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right). \qquad (11,2)$$

Таким образом, все операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ оказываются умноженными на функции с «правильной» зависимостью от времени ($\sim e^{-i\varepsilon t}$), а операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ — на комплексно-сопряженные им функции. Это и дает возможность истолковать, в соответствии с общими правилами, операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ как операторы уничтожения, а $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ — как операторы рождения частиц с импульсами $\mathbf{p}$ и энергиями ε.

Мы приходим к представлению о частицах двух родов, выступающих совместно и равноправно. О них говорят как о *частицах* и *античастицах* (смысл такого названия выяснится ниже). Одним из них отвечают в аппарате вторичного квантования операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, а другим — $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$. Оба вида частиц, операторы которых входят в один и тот же ψ-оператор, тем самым имеют одинаковые массы.

К этим результатам можно прийти и исходя из прямых требований релятивистской инвариантности.

Преобразования Лоренца представляют собой в математическом смысле повороты четырехмерной системы координат, меняющие направление оси времени (вместе с чисто пространственными поворотами, не затрагивающими оси времени, они составляют группу преобразований, которую называют *группой Лоренца*[1])). Все эти преобразования обладают тем общим свойством, что они не выводят ось t за пределы соответствующей полости светового конуса, чем и выражается физический принцип — существование предельной скорости распространения сигналов.

Но в чисто математическом отношении поворотом является также и одновременное изменение знака всех четырех координат (*четырехмерная инверсия*): определитель этого преобразования равен $+1$, как и определители всякого другого поворотного преобразования. При этом ось времени переводится из одной полости светового конуса в другую. Хотя это обстоятельство и означает физическую неосуществимость такого преобразования (как преобразования системы отсчета), но в математическом отношении отличие сводится лишь к тому, что (в силу псевдоевклидовости метрики) такой поворот не может быть произведен без того, чтобы не допустить попутно комплексное преобразование координат.

Естественно полагать, что это отличие должно быть несущественно, когда речь идет о четырехмерной инвариантности. Тогда всякое выражение, инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца, должно быть инвариантно и по отношению к 4-инверсии. Точная формулировка этого требования в применении к скалярному ψ-оператору будет дана в § 13. Но сразу же отметим, что оно во всяком случае приводит к необходимости одновременного присутствия в ψ-операторах членов с обоими знаками перед ε в показателях, поскольку замена $t \to -t$ как раз меняет этот знак.

Вернемся к выражениям (11,2) и установим перестановочные соотношения между операторами $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ (и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$). В случае фотонов это было сделано (для операторов $\hat{c}_{\mathbf{p}}$, $\hat{c}_{\mathbf{p}}^{+}$) исходя из аналогии с осцилляторами, т. е. по существу из свойств электромагнитного поля в классическом пределе. Теперь такой аналогии нет. Для установления правил коммутации (Бозе или Ферми) между операторами мы можем руководствоваться лишь видом построенного из этих операторов гамильтониана.

---

[1]) Отметим, что совокупность всех трехмерных (пространственных) поворотов составляет сама по себе группу, входящую в группу Лоренца в качестве подгруппы. Совокупность же преобразований Лоренца сама по себе не составляет группы: результат последовательных преобразований Лоренца может сводиться к чисто пространственному повороту.

Последний получается (см. III, § 64) подстановкой $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ вместо ψ и ψ^* в интеграл $\int T_{00}\, d^3x$ [1]). Таким образом найдем

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \right). \tag{11,3}$$

Легко видеть, что разумный результат для собственных значений этого гамильтониана получается, лишь если операторы удовлетворяют правилам коммутации Бозе:

$$\{\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\}_- = \{\hat{b}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}_{\mathbf{p}}^+\}_- = 1 \tag{11,4}$$

(все другие пары операторов коммутативны; в том числе коммутативны все операторы частиц $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ со всеми операторами античастиц $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+$). Действительно, в таком случае

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} + 1 \right).$$

Собственные значения произведений $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}}$ равны положительным целым числам $N_{\mathbf{p}}$ и $\overline{N}_{\mathbf{p}}$ — числам частиц и античастиц. Бесконечную же аддитивную постоянную $\sum \varepsilon$ («энергия вакуума») можно снова просто опустить:

$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(N_{\mathbf{p}} + \overline{N}_{\mathbf{p}} \right) \tag{11,5}$$

(ср. формулу (3,1) и примечание к ней). Это выражение существенно положительно и соответствует представлению о двух родах реально существующих частиц. Аналогичным образом для полного импульса системы частиц получим

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \left(N_{\mathbf{p}} + \overline{N}_{\mathbf{p}} \right). \tag{11,6}$$

Если бы мы приняли вместо (11,4) перестановочные соотношения Ферми (антикоммутаторы вместо коммутаторов), то получили бы

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} + 1 \right)$$

и вместо формулы (11,5) — физически бессмысленное выражение $\sum \varepsilon \left(N_{\mathbf{p}} - \overline{N}_{\mathbf{p}} \right)$. Это выражение не является положительно определенным и поэтому не может представлять собой энергию системы свободных частиц.

---

[1]) В нерелятивистской теории при этом полагается писать сопряженный оператор $\hat{\psi}^+$ слева от $\hat{\psi}$. Здесь же порядок безразличен, так как перестановка $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$ привела бы лишь к перестановке равноправных операторов $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$. Необходимо, однако, выбрав тот или иной порядок, всегда придерживаться одного правила.

Таким образом, частицы со спином 0 являются бозонами.

Далее, рассмотрим интеграл Q (10,19). Заменив в j^0 функции ψ и ψ^* операторами $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ и произведя интегрирование, получим

$$\hat{Q} = \sum_{\mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^+) = \sum_{\mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} - 1). \tag{11,7}$$

Собственные значения этого оператора (за вычетом несущественной аддитивной постоянной $\sum 1$):

$$Q = \sum_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}} - \bar{N}_{\mathbf{p}}), \tag{11,8}$$

т. е. равны разностям полных чисел частиц и античастиц.

До тех пор, пока мы рассматриваем свободные частицы, отвлекаясь от всякого взаимодействия между ними, смысл закона сохранения величины Q (как, впрочем, и законов сохранения полных энергии и импульса (11,5—6)) остается, разумеется, в значительной степени условным: сохраняется в действительности не только эта сумма, но и каждое из чисел $N_{\mathbf{p}}$, $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ в отдельности. Будет ли сохраняться величина Q в результате взаимодействия, зависит от характера взаимодействия. Если Q сохраняется (т. е. если оператор $\hat{Q}$ коммутирует с гамильтонианом взаимодействия), то выражение (11,8) показывает, какое этот закон вносит ограничение на возможные изменения числа частиц: могут возникать и исчезать лишь пары «частица + античастица».

Если частица электрически заряжена, то ее античастица должна иметь заряд противоположного знака: если бы та и другая имели одинаковые заряды, то возникновение или уничтожение их пары противоречило бы строгому закону природы — сохранению полного электрического заряда. Мы увидим ниже (§ 32), каким образом эта противоположность зарядов (при взаимодействии частиц с электромагнитным полем) возникает в теории автоматически.

Величину Q иногда называют *зарядом* поля данных частиц. Для электрически заряженных частиц Q определяет, в частности, полный электрический заряд системы (в единицах элементарного заряда e). Подчеркнем, однако, что частицы и античастицы могут быть электрически нейтральны.

Таким образом, мы видим, как характер релятивистской зависимости энергии от импульса (двузначность корня уравнения $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) совместно с требованиями релятивистской инвариантности приводит в квантовой теории к появлению нового классификационного принципа для частиц — возможности существования пар различных частиц («частица + античастица»), находящихся в описанном выше соответствии друг с другом. Это замечательное предсказание было впервые сделано (для частиц со спином $^1/_2$) *Дираком* в 1930 г., еще до фактического открытия первой античастицы — позитрона[1]).

§ 12. Истинно нейтральные частицы

При проведении вторичного квантования ψ-функции (11,1) коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ и $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ рассматривались как операторы, относящиеся к различным частицам. Это, однако, не обязательно: как частный случай входящие в $\hat{\psi}$ операторы уничтожения и рождения могут относиться к одним и тем же частицам (как это было для фотонов — ср. (2,17)). Обозначив в этом случае указанные операторы как $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{p}}^{+}$, напишем ψ-оператор в виде

$$\hat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx}\right). \qquad (12,1)$$

Описываемое таким оператором поле соответствует системе одинаковых частиц, о которых можно сказать, что они «совпадают со своими античастицами».

Оператор (12,1) эрмитов ($\hat{\psi}^{+} = \hat{\psi}$); в этом смысле такое поле имеет вдвое меньше «степеней свободы», чем комплексное поле, для которого операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^{+}$ не совпадают.

В связи с этим лагранжиан поля, выраженный через эрмитов оператор $\hat{\psi}$, должен содержать лишний (по сравнению с (10,9)) множитель $^1/_2$ [2])

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \hat{\psi} \cdot \partial^\mu \hat{\psi} - m^2 \hat{\psi}^2\right). \qquad (12,2)$$

Соответствующий тензор энергии-импульса

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\psi} \cdot \partial_\nu \hat{\psi} - \hat{L} g_{\mu\nu}, \qquad (12,3)$$

так что оператор плотности энергии

$$\hat{T}_{00} = \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}\right)^2 - \hat{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}\right)^2 + (\nabla \hat{\psi})^2 + m^2 \hat{\psi}^2\right]. \qquad (12,4)$$

Подставив (12,1) в интеграл $\int \hat{T}_{00}\, d^3x$, получим гамильтониан поля

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(\hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} \hat{c}_{\mathbf{p}} + \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+}\right). \qquad (12,5)$$

---

[1]) На бозоны понятие античастиц было распространено *Вайскопфом* и *Паули* (*V. Weisskopf*, *W. Pauli*, 1934).

[2]) Подобно лишнему множителю $^1/_2$ в операторе (2,10) плотности энергии электромагнитного поля (выраженного через эрмитовы операторы $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$), по сравнению с плотностью энергии фотона (3,2), выраженной через его комплексную волновую функцию; ср. примеч. на с. 26.