замечательное предсказание было впервые сделано (для частиц со спином $^1/_2$) *Дираком* в 1930 г., еще до фактического открытия первой античастицы — позитрона [1]).

§ 12. Истинно нейтральные частицы

При проведении вторичного квантования ψ-функции (11,1) коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ и $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ рассматривались как операторы, относящиеся к различным частицам. Это, однако, не обязательно: как частный случай входящие в $\hat{\psi}$ операторы уничтожения и рождения могут относиться к одним и тем же частицам (как это было для фотонов — ср. (2,17)). Обозначив в этом случае указанные операторы как $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{p}}^+$, напишем ψ-оператор в виде

$$\hat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{c}_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx}\right). \tag{12,1}$$

Описываемое таким оператором поле соответствует системе одинаковых частиц, о которых можно сказать, что они «совпадают со своими античастицами».

Оператор (12,1) эрмитов ($\hat{\psi}^+ = \hat{\psi}$); в этом смысле такое поле имеет вдвое меньше «степеней свободы», чем комплексное поле, для которого операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ не совпадают.

В связи с этим лагранжиан поля, выраженный через эрмитов оператор $\hat{\psi}$, должен содержать лишний (по сравнению с (10,9)) множитель $^1/_2$ [2])

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \hat{\psi} \cdot \partial^\mu \hat{\psi} - m^2 \hat{\psi}^2\right). \tag{12,2}$$

Соответствующий тензор энергии-импульса

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\psi} \cdot \partial_\nu \hat{\psi} - \hat{L} g_{\mu\nu}, \tag{12,3}$$

так что оператор плотности энергии

$$\hat{T}_{00} = \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}\right)^2 - \hat{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}\right)^2 + (\nabla \hat{\psi})^2 + m^2 \hat{\psi}^2\right]. \tag{12,4}$$

Подставив (12,1) в интеграл $\int \hat{T}_{00}\, d^3x$, получим гамильтониан поля

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \left(\hat{c}_{\mathbf{p}}^+ \hat{c}_{\mathbf{p}} + \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^+\right). \tag{12,5}$$

---

[1]) На бозоны понятие античастиц было распространено *Вайскопфом* и *Паули* (*V. Weisskopf*, *W. Pauli*, 1934).

[2]) Подобно лишнему множителю $^1/_2$ в операторе (2,10) плотности энергии электромагнитного поля (выраженного через эрмитовы операторы $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$), по сравнению с плотностью энергии фотона (3,2), выраженной через его комплексную волновую функцию; ср. примеч. на с. 26.

Отсюда снова видна необходимость квантования по Бозе:

$$\{\hat{c}_{\mathbf{p}},\ \hat{c}^{+}_{\mathbf{p}}\}_{-}=1, \tag{12,6}$$

и собственные значения энергии (снова за вычетом аддитивной постоянной)

$$E=\sum_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}}N_{\mathbf{p}}. \tag{12,7}$$

При квантовании же по Ферми мы получили бы бессмысленный результат — не зависящее от $N_{\mathbf{p}}$ значение E.

«Заряд» Q рассматриваемого поля равен нулю. Это ясно уже из того, что заряд Q должен менять знак при замене частиц античастицами, а в данном случае те и другие совпадают. В связи с этим не существует и 4-вектора плотности тока. Действительно, выражение

$$\hat{j}_{\mu}=i[\hat{\psi}^{+}\partial_{\mu}\hat{\psi}-(\partial_{\mu}\hat{\psi}^{+})\,\hat{\psi}] \tag{12,8}$$

для оператора сохраняющегося 4-вектора $\hat{j}$ при $\hat{\psi}=\hat{\psi}^{+}$ обращается в нуль (вектор же $\widehat{\psi\partial_{\mu}\psi}$ сам по себе не сохраняется). Это в свою очередь означает отсутствие какого-либо особого закона сохранения, который бы ограничивал возможные изменения числа частиц. Очевидно, что такие частицы, во всяком случае, электрически нейтральны.

Частицы такого рода называют *истинно нейтральными*, в отличие от электрически нейтральных частиц, имеющих античастицу. В то время как последние могут аннигилировать (превращаясь в фотоны) лишь парами, истинно нейтральные частицы могут аннигилировать поодиночке.

Структура ψ-оператора (12,1) — такая же, как структура операторов (2,17—20) электромагнитного поля. В этом смысле можно сказать, что и сами фотоны — истинно нейтральные частицы. В случае электромагнитного поля эрмитовость операторов была связана с вещественностью напряженностей поля как измеримых (в классическом пределе) физических величин. В случае же ψ-операторов частиц такой связи не существует, поскольку им вообще не соответствуют какие-либо непосредственно измеримые величины.

Отсутствие сохраняющегося 4-вектора тока есть общее свойство истинно нейтральных частиц и не связано с равным нулю спином (так, оно имеет место и для фотонов). Физически оно выражает отсутствие соответствующих запретов для изменения числа частиц. С формальной же точки зрения существует прямая связь между отсутствием сохраняющегося тока и вещественностью поля — эрмитовостью оператора $\hat{\psi}$.

Лагранжиан комплексного поля

$$\hat{L} = \partial_\mu \hat{\psi}^+ \cdot \partial^\mu \hat{\psi} - m^2 \hat{\psi}^+ \hat{\psi} \tag{12,9}$$

инвариантен по отношению к умножению ψ-оператора на произвольный фазовый множитель, т. е. по отношению к преобразованиям

$$\hat{\psi} \to e^{i\alpha} \hat{\psi}, \qquad \hat{\psi}^+ \to e^{-i\alpha} \hat{\psi}^+ \tag{12,10}$$

(их называют *калибровочными*). В частности, лагранжиан не меняется при бесконечно малом калибровочном преобразовании

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi} + i\delta\alpha \cdot \hat{\psi}, \qquad \hat{\psi}^+ \to \hat{\psi}^+ - i\delta\alpha \cdot \hat{\psi}^+. \tag{12,11}$$

При бесконечно малом изменении «обобщенных координат» q лагранжиан испытывает изменение

$$\delta \hat{L} = \sum \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) = \sum \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) \delta q + \sum \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right)$$

(суммирование по всем q). Первый член обращается в нуль в силу «уравнений движения» (уравнений Лагранжа). Понимая под «координатами» q операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ и положив

$$\delta \hat{\psi} = i\delta\alpha \cdot \hat{\psi}, \quad \delta \hat{\psi}^+ = - i\delta\alpha \cdot \hat{\psi}^+,$$

получим

$$\delta \hat{L} = i\delta\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\hat{\psi} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}_{,\mu}} - \hat{\psi}^+ \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}^+_{,\mu}} \right).$$

Отсюда видно, что условие неизменности лагранжиана ($\delta \hat{L} = 0$) эквивалентно уравнению непрерывности ($\partial_\mu \hat{j}^\mu = 0$) для 4-вектора

$$\hat{j}^\mu = i \left(\hat{\psi}^+ \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}^+_{,\mu}} - \hat{\psi} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}_{,\mu}} \right). \tag{12,12}$$

Легко убедиться, что для лагранжиана (12,9) эта формула приводит к току (12,8).

Таким образом, в математическом формализме теории существование сохраняющегося тока оказывается связанным с инвариантностью лагранжиана по отношению к калибровочным преобразованиям (*W. Pauli*, 1941). Лагранжиан же истинно нейтрального поля (12,2) этой симметрией не обладает.