§ 13. Преобразования C, P, T

В противоположность 4-инверсии трехмерная (пространственная) инверсия не сводима к каким-либо поворотам 4-системы координат: определитель этого преобразования равен не $+1$, а -1. Свойства симметрии частиц по отношению к инверсии (P-преобразование) не предопределяются поэтому соображениями релятивистской инвариантности[1]).

В применении к скалярной волновой функции операция инверсии заключается в преобразовании

$$\hat{P}\psi(t, \mathbf{r}) = \pm\psi(t, -\mathbf{r}), \tag{13,1}$$

где знак «+» или «—» в правой стороне отвечает соответственно истинному скаляру или псевдоскаляру.

Отсюда видно, что надо различать два аспекта поведения волновой функции при инверсии. Один из них связан с зависимостью волновой функции от координат. В нерелятивистской квантовой механике рассматривался только этот вопрос, — он приводит к понятию четности состояния (которую мы будем называть теперь *орбитальной четностью*), характеризующей свойства симметрии движения частицы. Если состояние обладает определенной орбитальной четностью ($+1$ или -1), то это значит, что

$$\psi(t, -\mathbf{r}) = \pm\psi(t, \mathbf{r}).$$

Другой аспект — поведение (при инверсии координатных осей) волновой функции в данной точке (которую удобно представлять себе как начало координат). Оно приводит к понятию *внутренней четности частицы*. Внутренней четности $+1$ или -1 отвечают (для частицы со спином 0) два знака в определении (13,1). Полная четность системы частиц дается произведением их внутренних четностей и орбитальной четности относительного движения.

«Внутренние» свойства симметрии различных частиц проявляются, разумеется, лишь в процессах их взаимных превращений. Аналогом внутренней четности в нерелятивистской квантовой механике является четность связанного состояния сложной системы (например, ядра). С точки зрения релятивистской теории, не делающей принципиального различия между составными и элементарными частицами, такая внутренняя четность не отличается от внутренней четности частиц, фигурирующих

---

[1]) Группу Лоренца, дополненную пространственной инверсией, называют *расширенной группой Лоренца* (в отличие от исходной группы, не содержащей P, которую в этой связи называют *собственной*). Расширенная группа содержит все преобразования, не выводящие ось t из соответствующих полостей светового конуса.

в нерелятивистской теории в качестве элементарных. В нерелятивистской области, где последние ведут себя как неизменяемые, их внутренние свойства симметрии не наблюдаемы, и поэтому их рассмотрение было бы лишено физического смысла.

В аппарате вторичного квантования внутренняя четность выражается поведением ψ-операторов при инверсии. Скалярному и псевдоскалярному полям отвечают законы преобразования

$$P\colon\ \hat{\psi}(t,\ \mathbf{r}) \to \pm\,\hat{\psi}(t,\ -\mathbf{r}). \tag{13,2}$$

Самый же смысл воздействия инверсии на ψ-оператор должен быть сформулирован в виде определенного преобразования операторов уничтожения и рождения частиц — такого, чтобы в его результате возникало изменение (13,2). Легко видеть, что таковым является

$$P\colon\ \hat{a}_{\mathbf{p}} \to \pm\,\hat{a}_{-\mathbf{p}},\ \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \pm\,\hat{b}_{-\mathbf{p}} \tag{13,3}$$

(и то же самое для сопряженных операторов). Действительно, произведя эту замену в операторе:

$$\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega t + i\mathbf{pr}} + \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} e^{i\omega t - i\mathbf{pr}}\right) \tag{13,4}$$

и переобозначив затем переменную суммирования ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$), мы приведем его к виду $\pm\hat{\psi}(t,\ -\mathbf{r})$. Таким образом, если обозначить посредством $\hat{\psi}^{P}(t,\ \mathbf{r})$ оператор, в котором произведено преобразование (13,3), то можно написать равенство

$$\hat{\psi}^{P}(t,\ \mathbf{r}) = \pm\,\hat{\psi}(t,\ -\mathbf{r}). \tag{13,5}$$

Отметим, что преобразование (13,3) имеет вполне естественный вид: инверсия меняет знак полярного вектора $\mathbf{p}$, так что частицы с импульсом $\mathbf{p}$ заменяются частицами с импульсом $-\mathbf{p}$.

В (13,3) операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ преобразуются либо оба с верхними, либо оба с нижними знаками. В аппарате вторичного квантования это является выражением одинаковости внутренних четностей частицы и античастицы (со спином 0). Сама же по себе эта одинаковость очевидна уже из того, что частицы и античастицы (со спином 0) описываются одними и теми же (скалярными или псевдоскалярными) волновыми функциями.

В релятивистской теории возникает также симметрия по отношению к преобразованию, не имеющему аналога в нерелятивистской теории; его называют *зарядовым сопряжением* (C-преобразование). Если взаимно переставить все операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$:

$$C\colon\ \hat{a}_{\mathbf{p}} \to \hat{b}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{13,6}$$

(т. е. взаимно заменить частицы античастицами), то $\hat{\psi}$ перейдет в «зарядово-сопряженный» оператор $\hat{\psi}^c$, причем

$$\hat{\psi}^c(t, \mathbf{r}) = \hat{\psi}^+(t, \mathbf{r}). \tag{13,7}$$

Это равенство выражает симметрию, с которой входят в теорию понятия частиц и античастиц.

Отметим, что в определении преобразования зарядового сопряжения содержится некоторый несущественный формальный произвол. Смысл преобразования не изменится, если ввести в определение (13,6) произвольный фазовый множитель:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to e^{i\alpha}\hat{b}_{\mathbf{p}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \to e^{-i\alpha}\hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Тогда было бы

$$\hat{\psi} \to e^{i\alpha}\hat{\psi}^+, \quad \hat{\psi}^+ \to e^{-i\alpha}\hat{\psi},$$

а двукратное повторение этого преобразования по-прежнему приводило бы к тождеству ($\hat{\psi} \to \hat{\psi}$). Все такие определения, однако, эквивалентны друг другу. Поскольку свойства ψ-операторов не меняются при умножении на фазовый множитель (ср. конец предыдущего параграфа), можно просто переобозначить $\hat{\psi}$ на $\hat{\psi}e^{i\alpha/2}$, после чего вернуться к определению зарядового сопряжения в виде (13,6—7).

Поскольку зарядовое сопряжение заменяет частицу нетождественной ей античастицей, оно не приводит в общем случае к возникновению какой-либо новой характеристики частицы или системы частиц как таковых.

Исключение в этом смысле составляют системы, состоящие из равного числа частиц и античастиц. Оператор $\hat{C}$ переводит такую систему саму в себя, и потому в этом случае у нее существуют собственные состояния, отвечающие собственным значениям $C = \pm 1$ (последние следуют из того, что $\hat{C}^2 = 1$). Для описания зарядовой симметрии можно при этом рассматривать частицу и античастицу как два различных «зарядовых состояния» одной и той же частицы, отличающихся значением зарядового квантового числа $Q = \pm 1$. Волновая функция системы представится как произведение орбитальной и «зарядовой» функции и должна быть симметричной по отношению к одновременной перестановке всех переменных (координатных и зарядовых) любой пары частиц. Симметрия же «зарядовой» функции определит зарядовую четность системы (см. задачу) [1].

Понятие зарядовой четности, естественным образом возникающее для «истинно нейтральных» систем, должно относиться и к

[1] В этих рассуждениях мы имеем в виду частицы со спином 0. Описанный способ рассмотрения непосредственно обобщается и на другие случаи — см., например, задачу к § 27.

истинно нейтральным «элементарным» частицам. В аппарате вторичного квантования это понятие описывается равенством

$$\hat{\psi}^C = \pm \hat{\psi}; \tag{13,8}$$

знаки «+» и «—» отвечают зарядово-четным и зарядово-нечетным частицам.

В § 11 было указано, что релятивистская инвариантность должна означать также и инвариантность по отношению к 4-инверсии. По отношению к оператору скалярного (в смысле 4-поворотов) поля это значит, что при таком преобразовании должно быть:

$$\hat{\psi}(t, \mathbf{r}) \to \hat{\psi}(-t, -\mathbf{r})$$

всегда с одинаковым знаком «+» в правой стороне. В терминах преобразования операторов $\hat{a}_\mathbf{p}$, $\hat{b}_\mathbf{p}$ превращение $\hat{\psi}(t, \mathbf{r})$ в $\hat{\psi}(-t, -\mathbf{r})$ достигается перестановкой в (13,4) коэффициентов при e^{-ipx} и e^{ipx}, т. е. заменой

$$\hat{a}_\mathbf{p} \to \hat{b}^+_\mathbf{p}, \quad \hat{b}_\mathbf{p} \to \hat{a}^+_\mathbf{p}. \tag{13,9}$$

Заменяя a-операторы b-операторами, это преобразование включает в себя взаимную замену частиц античастицами. Мы видим, что в релятивистской теории естественным образом возникает требование инвариантности по отношению к преобразованию, в котором одновременно с пространственной инверсией (P) и обращением времени (T) производится также зарядовое сопряжение (C); это утверждение называют *CPT-теоремой*[1]).

В этой связи, однако, уместно подчеркнуть, что хотя изложенные здесь и в § 11, 12 рассуждения и представляются естественным развитием понятий обычной квантовой механики и классической теории относительности, но полученные таким путем результаты выходят за их рамки как по форме (ψ-операторы, содержащие одновременно операторы рождения и уничтожения частиц), так и по существу (частицы и античастицы). Эти результаты нельзя поэтому рассматривать как чисто логическую необходимость. Они содержат в себе новые физические принципы, критерием правильности которых может быть лишь опыт.

Если обозначить посредством $\hat{\psi}^{CPT}(t, \mathbf{r})$ оператор (13,4), в котором произведено преобразование (13,9), то можно записать:

$$\hat{\psi}^{CPT}(t, \mathbf{r}) = \hat{\psi}(-t, -\mathbf{r}). \tag{13,10}$$

Сформулировав, таким образом, 4-инверсию как преобразование (13,9), мы тем самым устанавливаем для ψ-оператора

---

[1]) Оно было сформулировано *Людерсом* (*G. Lüders*, 1954) и *Паули* (*W. Pauli*, 1955).

также и формулировку преобразования обращения времени: вместе с преобразованием CP (его называют *комбинированной инверсией*) оно должно давать (13,9). Учитывая определения (13,3) и (13,6), находим поэтому

$$T\colon\ \hat{a}_{\mathbf{p}} \to \pm\, \hat{a}^{+}_{-\mathbf{p}},\quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \pm\, \hat{b}^{+}_{-\mathbf{p}} \tag{13,11}$$

(знаки «$\pm$» отвечают таким же знакам в (13,3)). Смысл этого преобразования вполне естествен: обращение времени не только переводит движение с импульсом $\mathbf{p}$ в движение с импульсом $-\mathbf{p}$, но также и переставляет начальные и конечные состояния в матричных элементах; поэтому операторы уничтожения частиц с импульсами $\mathbf{p}$ заменяются операторами рождения частиц с импульсами $-\mathbf{p}$. Произведя в (13,4) замену (13,11) и переобозначив переменную суммирования ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$), найдем, что[1])

$$\hat{\psi}^{T}(t,\ \mathbf{r}) = \pm\, \hat{\psi}^{+}(-t,\ \mathbf{r}). \tag{13,12}$$

Это равенство аналогично обычному правилу обращения времени в квантовой механике: если некоторое состояние описывается волновой функцией $\psi(t, \mathbf{r})$, то «обращенное по времени» состояние описывается функцией $\psi^{*}(-t, \mathbf{r})$; переход к комплексно-сопряженной функции связан с необходимостью восстановить нарушенный изменением знака t «правильный» характер зависимости от времени (*E. P. Wigner*, 1932).

Поскольку преобразование T (а с ним и CPT) переставляют начальные и конечные состояния, то для них понятия собственных состояний и собственных значений не имеют смысла. Они не приводят поэтому к новым характеристикам частиц как таковых. О следствиях же, к которым они приводят в применении к процессам рассеяния, будет идти речь в § 69, 71.

Рассмотрим, как меняется при преобразованиях C, P и T операторный 4-вектор тока $\hat{j}^{\mu}$ (12,8). Преобразование (13,2) вместе с заменой $(\partial_0, \partial_i) \to (\partial_0, -\partial_i)$ дает

$$P\colon\ (\hat{j}^{0},\ \hat{\mathbf{j}})_{t,\,\mathbf{r}} \to (\hat{j}^{0},\ -\hat{\mathbf{j}})_{t,\,-\mathbf{r}}, \tag{13,13}$$

как и должно быть для истинного 4-вектора. Преобразование (13,7) дало бы просто

$$C\colon\ (\hat{j}^{0},\ \hat{\mathbf{j}})_{t,\,\mathbf{r}} \to (-\hat{j}^{0},\ -\hat{\mathbf{j}})_{t,\,\mathbf{r}}, \tag{13,14}$$

если бы операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^{+}$ были коммутативны. Некоммутативность этих операторов возникает, однако, только от некомму-

[1]) Если определять операцию T безотносительно к другим преобразованиям, то возникнет тот же произвол в выборе фазового множителя, который имеется для операции C. Требование же симметрии CPT оставляет произвольным выбор фазового множителя лишь в одном из преобразований, C или T.

тативности $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ (или $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$) с одинаковыми $\mathbf{p}$; но в силу правил коммутации (11,4) перестановка этих операторов приводит лишь к появлению членов, не зависящих от чисел заполнения, т. е. от состояния поля. Отбрасывая (как и в (11,5—6)) эти члены, как несущественные, мы вернемся к правилу (13,14), имеющему естественный смысл: заменяя частицы античастицами, зарядовое сопряжение меняет знак всех компонент 4-тока.

Поскольку операция обращения времени связана с транспонированием начальных и конечных состояний, при применении к произведению операторов она меняет порядок множителей. Так,

$$(\hat{\psi}^{+}\partial_{\mu}\hat{\psi})^{T}=(\partial_{\mu}\hat{\psi})^{T}(\hat{\psi}^{+})^{T}.$$

В данном случае, однако, это обстоятельство несущественно: в силу коммутативности ψ-операторов (в указанном выше смысле) возвращение к исходному порядку множителей не отражается на результате. Заметив также, что при обращении времени $(\partial_0, \partial_i) \to (-\partial_0, \partial_i)$, найдем правило преобразования тока:

$$T\colon\ (\hat{j}^{0},\ \hat{\mathbf{j}})_{t,\,\mathbf{r}} \to (\hat{j}^{0},\ -\hat{\mathbf{j}})_{-t,\,\mathbf{r}}. \tag{13,15}$$

Трехмерный вектор $\mathbf{j}$ меняет знак в соответствии с классическим смыслом этой величины.

Наконец, при преобразовании CPT имеем

$$CPT\colon\ (\hat{j}^{0},\ \hat{\mathbf{j}})_{t,\,\mathbf{r}} \to (-\hat{j}^{0},\ -\hat{\mathbf{j}})_{-t,\,-\mathbf{r}} \tag{13,16}$$

в соответствии со смыслом этой операции как 4-инверсии. Подчеркнем в этой связи, что поскольку 4-инверсия сводится к повороту 4-системы координат, по отношению к ней вообще не существует двух типов (истинных и псевдо) 4-тензоров любого ранга.

До сих пор мы подразумевали частицы свободными. Но реальный смысл квантовые числа четности приобретают лишь при рассмотрении взаимодействующих частиц, когда с ними связываются определенные правила отбора, разрешающие или запрещающие те или другие процессы. Такой смысл, однако, могут иметь только сохраняющиеся характеристики — собственные значения операторов, коммутирующих с гамильтонианом взаимодействующих частиц.

В силу релятивистской инвариантности коммутативным с гамильтонианом должен во всяком случае быть оператор CPT-преобразования. Что же касается преобразований C и P (а с ними и T) по отдельности, то опыт показывает, что электромагнитные и сильные взаимодействия инвариантны по отношению к ним, так что соответствующие квантовые числа четности в этих

взаимодействиях сохраняются. В слабом же взаимодействии эти законы сохранения нарушаются [1]).

Забегая несколько вперед, укажем, что оператор взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем дается произведением операторных 4-векторов $\hat{A}$ и $\hat{j}$. Поскольку зарядовое сопряжение меняет знак $\hat{j}$, то инвариантность электромагнитного взаимодействия по отношению к этому преобразованию означает, что должен изменяться также и знак $\hat{A}$. Другими словами, фотоны — зарядово-нечетные частицы.

Указанное поведение операторов $\hat{A}$ находится в соответствии со свойствами 4-потенциала в классической теории. Действительно, из преобразований

$$C\colon\ (\hat{A}_0,\ \hat{\mathbf{A}}) \to (-\hat{A}_0,\ -\hat{\mathbf{A}})_{t,\,\mathbf{r}},$$

$$P\colon\ (\hat{A}_0,\ \hat{\mathbf{A}}) \to (\hat{A}_0,\ -\hat{\mathbf{A}})_{t,\,-\mathbf{r}},$$

$$CPT\colon\ (\hat{A}_0,\ \hat{\mathbf{A}}) \to (-\hat{A}_0,\ -\hat{\mathbf{A}})_{-t,\,-\mathbf{r}}$$

следует

$$T\colon\ (\hat{A}_0,\ \hat{\mathbf{A}}) \to (\hat{A}_0,\ -\hat{\mathbf{A}})_{-t,\,\mathbf{r}},$$

что и отвечает классическому правилу преобразования потенциалов электромагнитного поля при обращении времени.

Требование CPT-инвариантности не накладывает каких-либо ограничений на свойства частиц самих по себе. Оно приводит, однако, к определенной связи между свойствами частиц и античастиц. Сюда относится, прежде всего, равенство масс тех и других, — это ясно уже из изложенной в § 11 связи между 4-инверсией и самим происхождением понятия о частицах и античастицах.

Далее, из CPT-инвариантности следует, что коэффициенты пропорциональности между векторами электрического и магнитного моментов и вектором спина различаются у частицы и античастицы лишь знаком. Действительно, магнитный момент меняет знак при C- и T-преобразованиях и (будучи аксиальным вектором) P-инвариантен. Поэтому преобразование CPT, превращая частицу в античастицу, в то же время не меняет знак магнитного момента; вектор же спина меняет знак. То же самое относится к электрическому моменту, остающемуся неизменным при обращении времени и меняющему знак при C-преобразовании и (по свойствам полярного вектора) при пространственной инверсии.

---

[1]) Идея о возможном несохранении четности в слабых взаимодействиях была впервые высказана *Ли* и *Янгом* (*T. D. Lee, C. N. Yang*, 1956). Еще раньше общая мысль о необязательности P- и T-инвариантности физических законов была высказана *Дираком* (1949).

Требования же P- или T-инвариантности (если таковые соблюдаются) ограничивают свойства уже каждой из частиц: они запрещают существование у частицы электрического дипольного момента. Действительно, единственный вектор, который можно построить для покоящейся элементарной частицы из ее ψ-операторов, — это вектор оператора ее спина. Этот вектор P-четен и T-нечетен; он может поэтому определять только магнитный, но не электрический момент. Подчеркнем, что для этого запрета достаточно требования уже лишь одной P- или T-инвариантности.

Задача

Определить зарядовую и пространственную четности системы, состоящей из частицы со спином 0 и ее античастицы, с орбитальным моментом l относительного движения.

Решение. Перестановка координат частиц эквивалентна инверсии (относительно центра инерции) и поэтому умножает орбитальную функцию на $(-1)^l$; перестановка зарядовых переменных эквивалентна зарядовому сопряжению и умножает «зарядовый» множитель в волновой функции на искомое C. Из условия $C(-1)^l = 1$ имеем

$$C = (-1)^l.$$

Пространственная четность системы P есть произведение орбитальной четности и внутренних четностей обеих частиц. Поскольку внутренние четности частицы и античастицы одинаковы, то в данном случае P совпадает с орбитальной четностью: $P = (-1)^l$.

§ 14. Волновое уравнение для частицы со спином 1

Частица со спином 1 описывается в ее системе покоя трехкомпонентной волновой функцией — трехмерным вектором (о такой частице часто говорят как о *векторной*). По своему четырехмерному происхождению это могут быть три пространственные компоненты 4-вектора ψ^μ (пространственноподобного) или же смешанные компоненты антисимметричного 4-тензора второго ранга $\psi^{\mu\nu}$, у которых в системе покоя обращается в нуль временна́я (ψ^0) и пространственные (ψ^{ik}) компоненты[1]).

Волновое уравнение — дифференциальная связь между величинами ψ^μ, $\psi^{\mu\nu}$ — устанавливается соотношениями, которые мы запишем в виде

$$i\psi_{\mu\nu} = \hat{p}_\mu\psi_\nu - \hat{p}_\nu\psi_\mu, \tag{14,1}$$

$$im^2\psi_\mu = \hat{p}^\nu\psi_{\mu\nu}, \tag{14,2}$$

[1]) Забегая вперед, укажем, что совокупности 4-вектора ψ_μ и 4-тензора $\psi^{\nu\mu}$ отвечает совокупность четырехмерных спиноров второго ранга $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, причем $\xi^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ — симметричные спиноры, переходящие друг в друга при инверсии (см. § 19).