Требования же P- или T-инвариантности (если таковые соблюдаются) ограничивают свойства уже каждой из частиц: они запрещают существование у частицы электрического дипольного момента. Действительно, единственный вектор, который можно построить для покоящейся элементарной частицы из ее ψ-операторов, — это вектор оператора ее спина. Этот вектор P-четен и T-нечетен; он может поэтому определять только магнитный, но не электрический момент. Подчеркнем, что для этого запрета достаточно требования уже лишь одной P- или T-инвариантности.

Задача

Определить зарядовую и пространственную четности системы, состоящей из частицы со спином 0 и ее античастицы, с орбитальным моментом l относительного движения.

Решение. Перестановка координат частиц эквивалентна инверсии (относительно центра инерции) и поэтому умножает орбитальную функцию на $(-1)^l$; перестановка зарядовых переменных эквивалентна зарядовому сопряжению и умножает «зарядовый» множитель в волновой функции на искомое C. Из условия $C(-1)^l = 1$ имеем

$$C = (-1)^l.$$

Пространственная четность системы P есть произведение орбитальной четности и внутренних четностей обеих частиц. Поскольку внутренние четности частицы и античастицы одинаковы, то в данном случае P совпадает с орбитальной четностью: $P = (-1)^l$.

§ 14. Волновое уравнение для частицы со спином 1

Частица со спином 1 описывается в ее системе покоя трехкомпонентной волновой функцией — трехмерным вектором (о такой частице часто говорят как о *векторной*). По своему четырехмерному происхождению это могут быть три пространственные компоненты 4-вектора ψ^μ (пространственноподобного) или же смешанные компоненты антисимметричного 4-тензора второго ранга $\psi^{\mu\nu}$, у которых в системе покоя обращается в нуль временна́я (ψ^0) и пространственные (ψ^{ik}) компоненты[1]).

Волновое уравнение — дифференциальная связь между величинами ψ^μ, $\psi^{\mu\nu}$ — устанавливается соотношениями, которые мы запишем в виде

$$i\psi_{\mu\nu} = \hat{p}_\mu\psi_\nu - \hat{p}_\nu\psi_\mu, \tag{14,1}$$

$$im^2\psi_\mu = \hat{p}^\nu\psi_{\mu\nu}, \tag{14,2}$$

[1]) Забегая вперед, укажем, что совокупности 4-вектора ψ_μ и 4-тензора $\psi^{\nu\mu}$ отвечает совокупность четырехмерных спиноров второго ранга $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, причем $\xi^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ — симметричные спиноры, переходящие друг в друга при инверсии (см. § 19).

где $\hat{p} = i\partial$ (*A. Proca*, 1936). Применив к обеим сторонам уравнения (14,2) операцию $\hat{p}^\mu$, получим (ввиду антисимметричности $\psi_{\mu\nu}$)

$$\hat{p}^\mu \psi_\mu = 0. \tag{14,3}$$

Из (14,1—2) можно исключить $\psi_{\mu\nu}$, подставив первое уравнение во второе. Учитывая (14,3), получаем

$$(\hat{p}^2 - m^2)\psi_\mu = 0, \tag{14,4}$$

откуда снова (ср. § 10) видно, что m — масса частицы. Таким образом, свободную частицу со спином 1 можно описывать всего одним 4-вектором ψ^μ, компоненты которого удовлетворяют уравнению второго порядка (14,4), а также и дополнительному условию (14,3), исключающему из ψ^μ часть, принадлежащую спину 0.

В системе покоя, где ψ_μ не зависит от пространственных координат, найдем, что $\hat{p}^0\psi_0 = 0$. Поскольку в то же время $\hat{p}^0\psi_0 = m\psi_0$, мы видим, что в системе покоя $\psi_0 = 0$, как и должно быть. Вместе с ψ_0 обращаются в нуль также и ψ_{ik}.

Частица со спином 1 может обладать различной внутренней четностью — в зависимости от того, является ли ψ^μ истинным вектором или псевдовектором. В первом случае

$$\hat{P}\psi^\mu = (\psi^0, -\psi^i),$$

а во втором

$$\hat{P}\psi^\mu = (-\psi^0, \psi^i).$$

Уравнения (14,1—2) могут быть получены из вариационного принципа с лагранжианом:

$$L = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu *} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu *}(\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu) - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi_\nu^* - \partial_\nu\psi_\mu^*) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu *}. \tag{14,5}$$

Роль независимых обобщенных координат играют в нем ψ_μ, $\overset{*}{\psi}_\mu$, $\psi_{\mu\nu}$, $\overset{*}{\psi}_{\mu\nu}$ [1]).

Для нахождения тензора энергии импульса формула (10,11) в данном случае не вполне удобна, так как она привела бы к несимметричному тензору, который нуждался бы еще в дополнительной симметризации. Вместо этого можно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}_{\ \ ,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{14,6}$$

---

[1]) Если бы мы производили варьирование только по ψ_μ (предполагая заранее $\psi_{\mu\nu}$ выраженными через ψ_μ согласно (14,1)), то уравнение (14,3) должно было бы вводиться как дополнительное условие, не связанное с вариационным принципом.

в которой предполагается, что L выражено в виде, относящемся к произвольным криволинейным координатам (см. II, § 94). Если L содержит только компоненты самого метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (но не их производные по координатам), то формула упрощается:

$$T_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}=2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}-g_{\mu\nu}L$$

(напомним, что $d\ln g=-g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$).

Поскольку дифференцирование в формуле (14,6) производится не по величинам ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$, при ее применении необязательно считать эти величины независимыми; можно сразу воспользоваться связью (14,1) и переписать лагранжиан (14,5) в виде

$$L=-\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^*_{\lambda\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}+m^2\psi_\mu\psi^*_\nu g^{\mu\nu}. \tag{14,7}$$

Тогда

$$T_{\mu\nu}=-\psi_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^{\lambda*}-\psi^*_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^\lambda+m^2\left(\psi^*_\mu\psi_\nu+\psi^*_\nu\psi_\mu\right)+$$
$$+g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\psi_{\lambda\rho}\psi^{\lambda\rho*}-m^2\psi^*_\lambda\psi^\lambda\right). \tag{14,8}$$

В частности, плотность энергии дается существенно положительным выражением

$$T_{00}=\frac{1}{2}\psi_{ik}\psi^*_{ik}+\psi_{0i}\psi^*_{0i}+m^2\left(\psi_0\psi^*_0+\psi_i\psi^*_i\right). \tag{14,9}$$

Сохраняющийся 4-вектор плотности тока дается выражением

$$j^\mu=i\left(\psi^{\mu\nu*}\psi_\nu-\psi^{\mu\nu}\psi^*_\nu\right). \tag{14,10}$$

Его можно найти согласно формуле (12,12) дифференцированием лагранжиана (14,5) по производным $\partial_\mu\psi_\nu$. В частности,

$$j^0=i\left(\psi^{0k*}\psi_k-\psi^{0k}\psi^*_k\right) \tag{14,11}$$

и не является существенно положительной величиной.

Плоская волна, нормированная на одну частицу в объеме $V=1$:

$$\psi_\mu=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_\mu e^{-ipx},\quad u_\mu u^{\mu*}=-1, \tag{14,12}$$

где u_μ — единичный 4-вектор поляризации, удовлетворяющий (в силу (14.3)) условию четырехмерной поперечности

$$u_\mu p^\mu=0. \tag{14,13}$$

Действительно, подставив функцию (14,12) в (14,9) и (14,11), получим

$$T_{00}=-2\varepsilon^2\psi_\mu\psi^{\mu*}=\varepsilon,\qquad j^0=1.$$

В противоположность фотону векторная частица с ненулевой массой имеет три независимых направления поляризации. Соответствующие им амплитуды см. (16,21).

Поляризационная матрица плотности для частично поляризованных векторных частиц определяется таким образом, чтобы в чистом состоянии она сводилась к произведению

$$\rho_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu^*$$

(аналогично выражению (8,7) для фотонов). Согласно (14,12—13) она удовлетворяет условиям

$$p^\mu \rho_{\mu\nu} = 0, \quad \rho_\mu^\mu = -1. \tag{14,14}$$

Для неполяризованных частиц матрица $\rho_{\mu\nu}$ должна иметь вид $ag_{\mu\nu} + bp_\mu p_\nu$. Определив коэффициенты a и b из (14,14), найдем в результате

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right). \tag{14,15}$$

Квантование поля векторных частиц производится аналогично скалярному случаю, и нет необходимости повторять заново все рассуждения. ψ-операторы векторного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\mu &= \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{a}_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + \hat{b}_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}\right), \\ \hat{\psi}_\mu^+ &= \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{a}_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx} + \hat{b}_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx}\right), \end{aligned} \tag{14,16}$$

где индекс α нумерует три независимые поляризации.

Положительная определенность выражения (14,9) для T_{00} и неопределенность j^0 (14,11) приводят, как и в скалярном случае, к необходимости квантования по Бозе.

Существует тесная связь между свойствами истинно нейтрального векторного и электромагнитного полей. Нейтральное векторное поле описывается эрмитовым ψ-оператором:

$$\hat{\psi}_\mu = \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\hat{c}_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + \hat{c}_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}\right). \tag{14,17}$$

Лагранжиан этого поля

$$\hat{L} = \frac{1}{4}\hat{\psi}_{\mu\nu}\hat{\psi}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{\psi}^{\mu\nu}(\partial_\mu\hat{\psi}_\nu - \partial_\nu\hat{\psi}_\mu) + \frac{1}{2}m^2\hat{\psi}_\mu\hat{\psi}^\mu. \tag{14,18}$$

Электромагнитному полю отвечает случай $m = 0$. При этом 4-вектор ψ^μ становится 4-потенциалом A^μ, а 4-тензор $\psi^{\mu\nu}$ — тензором поля $F^{\mu\nu}$, связанным с потенциалом определением (14,1). Уравнение (14,2) превращается в $\partial^\nu\psi_{\mu\nu} = 0$, что соответствует второй паре уравнений Максвелла. Из него уже не следует условие (14,3), которое, таким образом, перестает быть обязательным. Ввиду отсутствия дополнительного условия нет необходимости рассматривать в лагранжиане $\hat{\psi}_\mu$ и $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ как независимые «координаты», и лагранжиан (14,18) сводится к

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}\hat{\psi}_{\mu\nu}\hat{\psi}^{\mu\nu} \tag{14,19}$$

в согласии с известным классическим выражением лагранжиана электромагнитного поля. Этот лагранжиан, вместе с тензором $\hat{\psi}_{\mu\nu}$, инвариантен по отношению к произвольному калибровочному преобразованию «потенциалов» $\hat{\psi}_\mu$. Ясно видна связь этого обстоятельства с нулевой массой: лагранжиан (14,18) не обладает этим свойством благодаря члену $m^2\hat{\psi}_\mu\hat{\psi}^\mu$.

§ 15. Волновое уравнение для частиц с высшими целыми спинами

Поскольку волновые уравнения (14,3—4) следуют непосредственно из задания массы и спина частицы, практическое использование лагранжиана сводится не столько к выводу этих уравнений, сколько к построению выражений для энергии, импульса и заряда поля.

Для этой цели, как уже отмечалось, можно пользоваться вместо (14,5) выражением (14,7), а последнее можно преобразовать еще дальше. Использовав (14,1), переписываем (14,7) в виде

$$L = -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + (\partial_\nu\psi_\mu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu*} =$$
$$= -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu + \partial_\nu(\psi_\mu^*\partial^\mu\psi^\nu) - \psi_\mu^*\partial^\mu\partial_\nu\psi^\nu.$$

В силу (14,3) последний член обращается в нуль, а предпоследний есть полная производная. Опустив ее, получим лагранжиан

$$L' = -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu. \tag{15,1}$$

Он имеет ту же структуру, что и лагранжиан (10,9) частицы со спином 0, отличаясь лишь заменой скаляра ψ на 4-вектор ψ_μ и общим знаком. Последнее связано с тем, что ψ_μ — пространственноподобный вектор, так что $\psi_\mu\psi^{\mu*} < 0$, в то время как для скалярной частицы $\psi\psi^* > 0$.

Если построить 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор тока с помощью лагранжиана (15,1), то мы получим выражения того же вида, что и выражения (10,12) и (10,18) для скалярного поля:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\psi^{\lambda*}\cdot\partial_\nu\psi_\lambda - \partial_\nu\psi^{\lambda*}\cdot\partial_\mu\psi_\lambda - L'g_{\mu\nu}, \tag{15,2}$$

$$j_\mu = -i\left[\psi_\lambda^*\partial_\mu\psi^\lambda - (\partial_\mu\psi_\lambda^*)\psi^\lambda\right]. \tag{15,3}$$