второй паре уравнений Максвелла. Из него уже не следует условие (14,3), которое, таким образом, перестает быть обязательным. Ввиду отсутствия дополнительного условия нет необходимости рассматривать в лагранжиане $\hat{\psi}_\mu$ и $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ как независимые «координаты», и лагранжиан (14,18) сводится к

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}\hat{\psi}_{\mu\nu}\hat{\psi}^{\mu\nu} \tag{14,19}$$

в согласии с известным классическим выражением лагранжиана электромагнитного поля. Этот лагранжиан, вместе с тензором $\hat{\psi}_{\mu\nu}$, инвариантен по отношению к произвольному калибровочному преобразованию «потенциалов» $\hat{\psi}_\mu$. Ясно видна связь этого обстоятельства с нулевой массой: лагранжиан (14,18) не обладает этим свойством благодаря члену $m^2\hat{\psi}_\mu\hat{\psi}^\mu$.

§ 15. Волновое уравнение для частиц с высшими целыми спинами

Поскольку волновые уравнения (14,3—4) следуют непосредственно из задания массы и спина частицы, практическое использование лагранжиана сводится не столько к выводу этих уравнений, сколько к построению выражений для энергии, импульса и заряда поля.

Для этой цели, как уже отмечалось, можно пользоваться вместо (14,5) выражением (14,7), а последнее можно преобразовать еще дальше. Использовав (14,1), переписываем (14,7) в виде

$$L = -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + (\partial_\nu\psi_\mu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu*} =$$
$$= -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu + \partial_\nu(\psi_\mu^*\partial^\mu\psi^\nu) - \psi_\mu^*\partial^\mu\partial_\nu\psi^\nu.$$

В силу (14,3) последний член обращается в нуль, а предпоследний есть полная производная. Опустив ее, получим лагранжиан

$$L' = -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu. \tag{15,1}$$

Он имеет ту же структуру, что и лагранжиан (10,9) частицы со спином 0, отличаясь лишь заменой скаляра ψ на 4-вектор ψ_μ и общим знаком. Последнее связано с тем, что ψ_μ — пространственноподобный вектор, так что $\psi_\mu\psi^{\mu*} < 0$, в то время как для скалярной частицы $\psi\psi^* > 0$.

Если построить 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор тока с помощью лагранжиана (15,1), то мы получим выражения того же вида, что и выражения (10,12) и (10,18) для скалярного поля:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\psi^{\lambda*}\cdot\partial_\nu\psi_\lambda - \partial_\nu\psi^{\lambda*}\cdot\partial_\mu\psi_\lambda - L'g_{\mu\nu}, \tag{15,2}$$

$$j_\mu = -i\left[\psi_\lambda^*\partial_\mu\psi^\lambda - (\partial_\mu\psi_\lambda^*)\psi^\lambda\right]. \tag{15,3}$$

Их отличие от (14,8) и (14,10) тоже сводится к полным производным. Но локальные значения этих величин не имеют (как уже подчеркивалось ранее) глубокого физического смысла. Существенны лишь объемные интегралы P_μ (10,15) и Q (10,19), которые будут совпадать при обоих выборах $T_{\mu\nu}$ и j_μ.

Такой способ описания непосредственно обобщается на частицы с произвольным (целым) спином. Волновая функция частицы со спином s есть неприводимый 4-тензор ранга s, т. е. тензор, симметричный по всем своим индексам и обращающийся в нуль при упрощении по любой паре индексов:

$$\psi_{\ldots\mu\ldots\nu\ldots} = \psi_{\ldots\nu\ldots\mu}, \quad \psi_{\ldots\mu\ldots}{}^{\mu}{}_{\ldots} = 0. \qquad (15,4)$$

Этот тензор должен удовлетворять дополнительному условию 4-поперечности:

$$p^\mu \psi_{\ldots\mu\ldots} = 0, \qquad (15,5)$$

а каждая из его компонент — уравнению второго порядка:

$$(p^2 - m^2)\psi_{\ldots} = 0. \qquad (15,6)$$

В системе покоя условие (15,5) приводит к обращению в нуль всех компонент 4-тензора, среди индексов которых есть 0. Другими словами, волновая функция в системе покоя (т. е. в нерелятивистском пределе) сводится, как и следовало, к неприводимому 3-тензору ранга s, число независимых компонент которого равно $2s+1$.

Лагранжиан, тензор энергии-импульса и вектор тока для поля частиц со спином s отличаются от (15,1—3) лишь заменой ψ_λ на $\psi_{\lambda\mu\ldots}$.

Нормированная плоская волна:

$$\psi^{\mu\nu\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\ldots} e^{-ipx}, \quad u^*_{\mu\nu\ldots} u^{\mu\nu\ldots} = -1, \qquad (15,7)$$

причем амплитуда волны удовлетворяет условиям

$$u^{\ldots\mu\ldots} p_\mu = 0. \qquad (15,8)$$

Имеется $2s+1$ независимых состояний поляризации.

Квантование поля производится очевидным обобщением случаев спина 0 или 1.

Изложенная схема вполне достаточна для поставленной цели — описания поля свободных частиц. Иное дело, если ставить задачу об описании взаимодействия частиц с электромагнитным полем. Это взаимодействие должно было бы вводиться в лагранжиан, из которого все уравнения могли бы быть получены без необходимости постановки дополнительных условий. Однако фактически оказывается, что такое описание взаимодействия применимо только для электронов — частиц со спином $^1/_2$ (см. § 32). Поэтому для других спинов эта задача могла бы иметь лишь методический интерес.

Отметим, что для всех (целых и полуцелых) спинов $s > 1$ оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип с помощью одной только функции (тензорной или спинорной), ранг которой соответствует данному спину. Для этой цели оказывается необходимым ввести в качестве вспомогательных также тензорные или спинорные величины более низкого ранга. При этом лагранжиан подбирается таким образом, чтобы эти вспомогательные величины автоматически обращались в нуль в силу следующих из вариационного принципа уравнений поля свободных частиц [1]).

§ 16. Спиральные состояния частицы [2])

В релятивистской теории орбитальный момент $\mathbf{l}$ и спин $\mathbf{s}$ движущейся частицы не сохраняются каждый в отдельности. Сохраняется лишь полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Не сохраняется поэтому и проекция спина на какое-либо заданное направление (ось z), и поэтому эта величина не может служить для перечисления поляризационных (спиновых) состояний движущейся частицы.

Сохраняется, однако, проекция спина на направление импульса: поскольку $\mathbf{l} = [\mathbf{rp}]$, то произведение $\mathbf{sn}$ совпадает с сохраняющимся произведением $\mathbf{jn}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$). Эту величину называют *спиральностью* [3]) (мы уже рассматривали ее для фотона в § 8). Ее собственные значения будем обозначать буквой λ ($\lambda = -s, \ldots, +s$), а состояния частицы с определенными значениями λ будем называть спиральными состояниями.

Пусть $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ — волновая функция (плоская волна), описывающая состояние частицы с определенными $\mathbf{p}$ и λ, а $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$ — ее амплитуда; для краткости обозначений мы не выписываем индексы компонент этой функции (для целого спина это — 4-тензорные индексы).

Мы видели в предыдущих параграфах, что при релятивистском описании частиц с отличным от нуля (целым) спином приходится вводить волновую функцию с числом компонент, превышающим $2s + 1$. Однако число независимых компонент при этом остается равным $2s + 1$; «лишние» компоненты устраняются наложением дополнительных условий, в силу которых эти

---

[1]) См. *Fierz M., Pauli W.*//Proc. Roy. Soc. — 1939. — Vol. A 173. — P. 211. В этой работе указанная программа проведена для частиц со спином $^3/_2$ и 2.

[2]) Содержание этого параграфа относится к частицам с любым (целым или полуцелым) спином.

[3]) В английской литературе — helicity.