применимо только для электронов — частиц со спином $^1/_2$ (см. § 32). Поэтому для других спинов эта задача могла бы иметь лишь методический интерес.

Отметим, что для всех (целых и полуцелых) спинов $s > 1$ оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип с помощью одной только функции (тензорной или спинорной), ранг которой соответствует данному спину. Для этой цели оказывается необходимым ввести в качестве вспомогательных также тензорные или спинорные величины более низкого ранга. При этом лагранжиан подбирается таким образом, чтобы эти вспомогательные величины автоматически обращались в нуль в силу следующих из вариационного принципа уравнений поля свободных частиц[1]).

§ 16. Спиральные состояния частицы[2])

В релятивистской теории орбитальный момент $\mathbf{l}$ и спин $\mathbf{s}$ движущейся частицы не сохраняются каждый в отдельности. Сохраняется лишь полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Не сохраняется поэтому и проекция спина на какое-либо заданное направление (ось z), и поэтому эта величина не может служить для перечисления поляризационных (спиновых) состояний движущейся частицы.

Сохраняется, однако, проекция спина на направление импульса: поскольку $\mathbf{l} = [\mathbf{rp}]$, то произведение $\mathbf{sn}$ совпадает с сохраняющимся произведением $\mathbf{jn}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$). Эту величину называют *спиральностью*[3]) (мы уже рассматривали ее для фотона в § 8). Ее собственные значения будем обозначать буквой λ ($\lambda = -s, \ldots, +s$), а состояния частицы с определенными значениями λ будем называть спиральными состояниями.

Пусть $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ — волновая функция (плоская волна), описывающая состояние частицы с определенными $\mathbf{p}$ и λ, а $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$ — ее амплитуда; для краткости обозначений мы не выписываем индексы компонент этой функции (для целого спина это — 4-тензорные индексы).

Мы видели в предыдущих параграфах, что при релятивистском описании частиц с отличным от нуля (целым) спином приходится вводить волновую функцию с числом компонент, превышающим $2s+1$. Однако число независимых компонент при этом остается равным $2s+1$; «лишние» компоненты устраняются наложением дополнительных условий, в силу которых эти

---

[1]) См. *Fierz M., Pauli W.*//Proc. Roy. Soc. — 1939. — Vol. A 173. — P. 211. В этой работе указанная программа проведена для частиц со спином $^3/_2$ и 2.

[2]) Содержание этого параграфа относится к частицам с любым (целым или полуцелым) спином.

[3]) В английской литературе — helicity.

компоненты обращаются в нуль в системе покоя (в следующей главе мы увидим это же для полуцелых s).

Согласно формулам преобразования момента (см. II, § 14) спиральность инвариантна относительно преобразований Лоренца, не меняющих направления $\mathbf{p}$, на которое проецируется момент. Поэтому число λ сохраняет при таких преобразованиях свой смысл квантового числа, и для изучения свойств симметрии спиральных состояний можно воспользоваться системой отсчета, в которой импульс $|\mathbf{p}| \ll m$ (в пределе — системой покоя). Тогда $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ сведется к нерелятивистской $(2s+1)$-компонентной волновой функции. Обозначим ее амплитуду через $w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$, указав в качестве аргумента направление $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, вдоль которого квантуется момент. Амплитуда $w^{(\lambda)}$ — собственная функция оператора $\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}$:

$$(\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}})\, w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\mathbf{n}). \qquad (16,1)$$

В спинорном представлении $w^{(\lambda)}$ — контравариантный симметричный спинор ранга $2s$; согласно формулам соответствия III (57,2) его компоненты можно перечислять также по отвечающим им значениям проекции спина σ на фиксированную ось z [1]).

В импульсном представлении волновые функции рассматриваемых состояний совпадают в основном с амплитудами $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$. Именно:

$$\psi_{\mathbf{p}\lambda}(\mathbf{k}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{k})\, \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{p})\, \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n}), \qquad (16,2)$$

где импульс как независимая переменная обозначен $\mathbf{k}$, в отличие от его собственного значения $\mathbf{p}$, а $\mathbf{v} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, в отличие от $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ [2]). В нерелятивистском пределе

$$\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\mathbf{v}) = w^{(\lambda)}(\mathbf{v})\, \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n}) = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})\, \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n}). \qquad (16,3)$$

---

[1]) Приведенные рассуждения (как и перечисление возможных значений λ) относятся к частицам с отличной от нуля массой. Для частиц с нулевой массой системы покоя не существует, а спиральность может иметь лишь два значения $\lambda = \pm s$. Последнее связано с упомянутым уже в § 8 обстоятельством: состояния такой частицы классифицируются по их поведению по отношению к группе аксиальной симметрии, допускающей только двукратное вырождение уровней (с точки зрения свойств волнового уравнения это означает, что при переходе к пределу $m \to 0$ система уравнений для частицы со спином s распадается на независимые уравнения, отвечающие безмассовым частицам со спинами s, $s-1$, ...). Так, для фотона $\lambda = \pm 1$, а роль соответствующих $w^{(\lambda)}$ играют трехмерные векторы $\mathbf{e}^{(\pm 1)}$ (8,2).

[2]) Здесь δ-функция $\delta^{(2)}$ определена так, что $\int \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n})\, do_{\nu} = 1$. В (16,2) (и в аналогичном случае ниже, см. (16,4)) опущена δ-функция, обеспечивающая заданное значение энергии.

Более подробно это выражение надо было бы написать в виде

$$\psi_{n\lambda}(\mathbf{v},\ \sigma) = w_\sigma^{(\lambda)}(\mathbf{v})\,\delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{n}),$$

где явно указана также и дискретная независимая переменная σ.

Оператор спиральности $\widehat{\mathbf{sn}}$ коммутативен с операторами $\hat{j}_z$ и $\hat{\mathbf{j}}^2$. Действительно, оператор момента связан с бесконечно малым поворотом системы координат, а скалярное произведение двух векторов инвариантно по отношению к любому повороту. Поэтому существуют стационарные состояния, в которых частица обладает одновременно определенными значениями момента j, его проекции $j_z = m$ и спиральности λ. Будем называть такие состояния *сферическими спиральными состояниями*.

Определим волновые функции этих состояний в импульсном представлении. Это можно сделать непосредственно по аналогии с полученными в III, § 103 формулами для волновых функций симметричного волчка. Они были получены там на основании формул для преобразования волновых функций при конечных вращениях (см. III, § 58). Последние, в свою очередь, основаны только на свойствах симметрии по отношению к вращениям; поэтому они применимы к функциям в импульсном представлении в той же мере, как и к координатным функциям.

Наряду с фиксированной в пространстве системой координат xyz (по отношению к которой записываются функции $\psi_{jm\lambda}$), введем также «подвижную» систему $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль направления $\mathbf{v}$. Не повторяя заново соответствующих рассуждений (ср. вывод формулы III (103,8)), напишем

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k}) = \psi_{j\lambda}^{(0)} D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}),$$

где $\psi_{j\lambda}^{(0)}$ — волновая функция в «подвижной» системе координат, описывающая состояние частицы с определенным значением ζ-проекции момента: $j_\zeta = \lambda$; в импульсном представлении эта функция совпадает, очевидно, с амплитудой $u^{(\lambda)}$. Нормированная (см. ниже) волновая функция

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v})\, u^{(\lambda)}(\mathbf{k}). \qquad (16,4)$$

Здесь возникает, однако, вопрос о выборе фаз, связанный со следующей неоднозначностью. Поворот системы координат $\xi\eta\zeta$ относительно xyz определяется тремя углами Эйлера α, β, γ; направление же $\mathbf{v}$, от которого только и может зависеть волновая функция частицы, зависит лишь от двух сферических углов $\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \theta$. Поэтому надо условиться о каком-либо выборе угла γ. Будем полагать $\gamma = 0$, т. е. определим $D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v})$ как

$$D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}) = D_{\lambda m}^{(j)}(\varphi,\ \theta,\ 0) = e^{im\varphi} d_{\lambda m}^{(j)}(\theta). \qquad (16,5)$$

В силу III (58,21) функции (16,5) удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки:

$$\int D^{(j_1)*}_{\lambda_1 m_1}(\mathbf{v})\, D^{(j_2)}_{\lambda_2 m_2}(\mathbf{v})\,\frac{do_\mathbf{v}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1}\,\delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 m_2} \qquad (16,6)$$

($do_\mathbf{v} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$). Ортогональность же функций $\psi_{jm\lambda}$ по индексу λ обеспечивается множителем $u^{(\lambda)}$. Таким образом, функции $\psi_{jm\lambda}$ ортогональны, как и должно быть, по всем индексам $jm\lambda$, а при выбранном в (16,4) коэффициенте они нормированы условием

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2\, do_\mathbf{v} = 1. \qquad (16,7)$$

При этом предполагается, что амплитуды $u^{(\lambda)}$ нормированы на единицу: $u^{(\lambda)}u^{(\lambda)*} = 1$.

Рассмотрим поведение волновых функций спиральных состояний по отношению к инверсии координат. Произведение полярного вектора $\mathbf{v}$ на аксиальный вектор $\mathbf{j}$ — псевдоскаляр. Поэтому ясно, что в результате инверсии состояние со спиральностью λ переходит в состояние с $-\lambda$; надо лишь определить фазовые множители в этих преобразованиях.

При инверсии $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{v}$ определяется двумя углами φ, θ, и преобразование $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ осуществляется заменой $\varphi \to \varphi + \pi$, $\theta \to \pi - \theta$. Тем самым фиксируется ось ζ, но остается неопределенным положение осей ξ и η, зависящее также и от третьего угла Эйлера γ; преобразование одних только θ и φ не дает возможности различать в этом смысле инверсию системы координат от поворота оси ζ. В терминах всех трех углов Эйлера инверсия есть преобразование

$$\alpha \equiv \varphi \to \varphi + \pi, \quad \beta \equiv \theta \to \pi - \theta, \quad \gamma \to \pi - \gamma. \qquad (16,8)$$

Поэтому, если $D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})$ определено согласно (16,5) (т. е. с $\gamma = 0$), а замена $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ подразумевается как результат инверсии, то

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi + \pi,\ \pi - \theta,\ \pi). \qquad (16,9)$$

С помощью формул III (58,9), (58,16), (58,18) находим поэтому

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = e^{i\lambda\pi} d^{(j)}_{\lambda m}(\pi - \theta)\, e^{im(\varphi+\pi)} =$$

$$= (-1)^{j-\lambda} e^{im\varphi} d^{(j)}_{-\lambda m}(\theta) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\varphi,\ \theta,\ 0),$$

или

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = (-1)^{-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\mathbf{v}) \qquad (16,10)$$

($j - \lambda$ — целое число).

Аналогичную формулу для спинора $w^{(\lambda)}$ можно получить, заметив, что его компоненты $w^{(\lambda)}_\sigma$ совпадают, с точностью до множителя, с функциями

$$w_\sigma^{(\lambda)}(\mathbf{v}) \propto D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\mathbf{v})^*. \qquad (16,11)$$

Действительно, применив формулу преобразования III (58,7) к собственным функциям спина и положив, что его ζ-проекция имеет определенное значение λ (т. е. заменив в правой стороне III (58,7) $\psi_{jm'}$ на $\delta_{m'\lambda}$), мы найдем, что $D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\mathbf{v})$ — спиновые волновые функции, отвечающие определенным значениям его z- и ζ-проекций (σ и λ). Совокупность этих функций ($\sigma = -s, \ldots \ldots, +s$) составляет (по формулам соответствия III (57,6)) ковариантный спинор ранга $2s$. Компоненты же контравариантного спинора (которым по формулам III (57,2) отвечают компоненты $w_\sigma^{(\lambda)}$) преобразуются как комплексно-сопряженные от компонент ковариантного спинора того же ранга.

Из (16,10—11) имеем

$$w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}) \qquad (16,12)$$

($s - \lambda$ — целое число). Операция инверсии в применении к $w^{(\lambda)}$ состоит однако не только в замене $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, но и в умножении на общий фазовый множитель («внутренняя четность» частицы), который мы обозначим η:

$$\hat{P}w^{(\lambda)}(\mathbf{v}) = \eta w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = \eta(-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}). \qquad (16,13)$$

Для релятивистской же амплитуды $u^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ это преобразование запишется в виде

$$\hat{P}u^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \eta\beta u^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) = \eta(-1)^{s-\lambda} u^{(-\lambda)}(\mathbf{k}), \qquad (16,14)$$

где β — некоторая матрица, единичная по отношению к компонентам $u^{(\lambda)}$, остающимся в пределе $|\mathbf{p}| \to 0$. Важно, что эта матрица не зависит от квантовых чисел состояния, и в этом смысле разница между (16,13) и (16,14) несущественна[1]).

Применив (16,14) к (16,2), получим закон преобразования волновых функций состояний $|\mathbf{n}\lambda\rangle$:

$$\hat{P}\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\mathbf{v}) = \eta(-1)^{s-\lambda}\psi_{-\mathbf{n}-\lambda}(\mathbf{v}). \qquad (16,15)$$

Для сферических спиральных состояний, воспользовавшись (16,10) и (16,12), получим закон преобразования:

$$\hat{P}\psi_{jm\lambda}(\mathbf{v}) = \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm-\lambda}(\mathbf{v}). \qquad (16,16)$$

---

[1]) Так, для $s = 1$ амплитуды $u^{(\lambda)}$ — 4-векторы (16,22); при этом β — полностью единичная матрица по 4-векторным индексам: $\beta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Для $s = 1/2$ (как мы увидим в следующей главе) $u^{(\lambda)}$ — биспинор; при этом фазовый множитель $\eta = i$, а β — матрица Дирака γ^0 (см. 21,10)).

Состояния ψ_{jm0} преобразуются, согласно (16,16), сами через себя, т. е. обладают определенной четностью. Если же $\lambda \neq 0$, то определенной четностью обладают лишь суперпозиции состояний с противоположными спиральностями:

$$\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{jm\lambda} \pm \psi_{jm-\lambda}\right). \tag{16,17}$$

При инверсии они преобразуются сами через себя согласно

$$\hat{P}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}) = \pm\,\eta(-1)^{j-s}\,\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}). \tag{16,18}$$

Обратим внимание на то, что мы произвели в этом параграфе классификацию состояний свободной частицы с заданным моментом, оперируя только с сохраняющимися величинами и не прибегая к понятию орбитального момента (использованного, например, в § 6, 7 для классификации состояний фотона).

В качестве примера рассмотрим случай спина 1. В системе покоя амплитуды $u^{(\lambda)}$ (4-векторы) сводятся к трехмерным векторам $\mathbf{e}^{(\lambda)}$, которые и играют здесь роль амплитуд $w^{(\lambda)}$. Действие оператора спина 1 на векторную функцию $\mathbf{e}$ дается формулой

$$(\hat{s}_i\mathbf{e})_k = -ie_{ikl}e_l \tag{16,19}$$

(см. III, § 57, задача 2). Поэтому уравнение (16,1) принимает вид

$$i\,[\mathbf{n}\mathbf{e}^{(\lambda)}] = \lambda\mathbf{e}^{(\lambda)}. \tag{16,20}$$

Его решения (в системе координат $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль $\mathbf{n}$) совпадают с циркулярными ортами (7,14) [1]:

$$\mathbf{e}^{(0)} = i\,(0,\ 0,\ 1), \quad \mathbf{e}^{(\pm 1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(1,\ \pm i,\ 0). \tag{16,21}$$

В системе отсчета, где частица имеет импульс $\mathbf{p}$, амплитуды спиральных состояний — 4-векторы

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m},\ \frac{\varepsilon}{m}\mathbf{e}^{(0)}\right), \quad u^{(\pm 1)\mu} = (0,\ \mathbf{e}^{(\pm 1)}). \tag{16,22}$$

Если $\mathbf{e}$ — полярный вектор, то $\eta = -1$. Тогда функции (16,17) (при $s = 1$ — трехмерные векторы) имеют следующие четности:

$$\begin{aligned} &\psi^{(+)}_{jm|\lambda|}: \ P = (-1)^j, \\ &\psi^{(-)}_{jm|\lambda|}: \ P = (-1)^{j+1}, \\ &\psi_{jm0} \quad : \ P = (-1)^j. \end{aligned}$$

---

[1]) Выбор фазовых множителей фиксируется требованием, чтобы вычисленные с помощью собственных функций (16,21) матричные элементы операторов спина отвечали общим определениям в III, § 27, 107.

Сравнивая с определением шаровых векторов (7,4), мы видим, что эти функции тождественны (с точностью до фазовых множителей) соответственно с $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$. Определив фазовые множители (скажем, путем сравнения значений при $\theta = 0$), получим следующие равенства:

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(э)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(\mathbf{e}^{(1)}D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)}D_{-1m}^{(j)}\right),$$

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(м)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(\mathbf{e}^{(1)\prime}D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)\prime}D_{-1m}^{(j)}\right), \qquad (16,23)$$

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(п)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\,\mathbf{e}^{(0)}D_{0m}^{(j)}$$

— целое число l); $\mathbf{e}^{(\lambda)\prime} = [\mathbf{n}\mathbf{e}^{(\lambda)}]$ — циркулярные орты в осях $\xi'\eta'\zeta$ повернутых относительно $\xi\eta\zeta$ на 90° вокруг оси ζ.

Последняя из формул (16,23) эквивалентна выражению III (58,23) для $d_{0m}^{(j)}(\theta)$. Из первой же (или второй) формулы можно получить простое выражение для функций $d_{\pm 1m}^{(j)}$. Имеем

$$i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,D_{\pm 1m}^{(j)} = \mathbf{Y}_{jm}^{(э)}\mathbf{e}^{(\pm 1)*} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\,\mathbf{e}^{(\pm 1)*}\nabla Y_{jm}.$$

Скалярное произведение в правой стороне равенства раскрываем в системе $\xi\eta\zeta$, причем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Вспомнив определение (7,2) функции Y_{jm} и определение (16,5), получим в результате

$$d_{\pm 1m}^{(j)}(\theta) = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!\,j(j+1)}}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m}{\sin\theta}\right)P_j^m(\cos\theta),$$

$$m \geqslant 0. \qquad (16,24)$$