ГЛАВА III

ФЕРМИОНЫ

§ 17. Четырехмерные спиноры

В нерелятивистской теории частица с произвольным спином s описывается $(2s+1)$-компонентной величиной — симметричным спинором ранга $2s$. С математической точки зрения это — величины, реализующие неприводимые представления группы пространственных вращений.

В релятивистской теории эта группа выступает лишь как подгруппа более широкой группы четырехмерных вращений — группы Лоренца. В связи с этим возникает необходимость в построении теории четырехмерных спиноров (4-спиноров) — величин, осуществляющих неприводимые представления группы Лоренца; ее изложению посвящены § 17—19. При этом в § 17, 18 рассматривается лишь собственная группа Лоренца, не содержащая пространственной инверсии; последняя будет рассмотрена в § 19.

Теория 4-спиноров строится аналогично теории трехмерных спиноров (*B. L. van der Waerden*, 1929; *G. E. Uhlenbeck*, *O. Laporte*, 1931).

Спинор ξ^α есть двухкомпонентная величина $(\alpha = 1, 2)$; как компоненты волновой функции частицы со спином $^1/_2$ ξ^1 и ξ^2 отвечают собственным значениям z-проекции спина, равным соответственно $+^1/_2$ и $-^1/_2$. При всяком преобразовании (собственной) группы Лоренца две величины ξ^1, ξ^2 преобразуются друг через друга:

$$\xi^{1'} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \quad \xi^{2'} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2. \tag{17,1}$$

Коэффициенты α, β, γ, δ — определенные функции углов поворота 4-системы координат, подчиненные условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{17,2}$$

т. е. определитель бинарного преобразования (17,1) равен 1, как и определители преобразований координат в группе Лоренца.

В силу условий (17,2) билинейная форма $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ (где ξ^α и Ξ^α — два спинора) инвариантна относительно преобразования (17,1) (она отвечает частице со спином 0, «составленной» из двух частиц со спином $^1/_2$). Для естественной записи таких инвариантных выражений наряду с «контравариантными» компонентами спинора ξ^α вводятся также и «ковариантные» компоненты ξ_α. Переход от одних к другим совершается с помощью «метрического спинора» $g_{\alpha\beta}$ [1]):

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{17,3}$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17,4}$$

так что

$$\xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1. \tag{17,5}$$

Тогда инвариант $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ записывается в виде скалярного произведения $\xi^\alpha\Xi_\alpha$. При этом $\xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha$.

До сих пор перечисленные свойства формально совпадали со свойствами трехмерных спиноров. Разница, однако, возникает при рассмотрении комплексно-сопряженных спиноров.

В нерелятивистской теории сумма

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}, \tag{17,6}$$

определяющая плотность вероятности локализации частиц в пространстве, должна была быть скаляром, а для этого компоненты $\psi^{\alpha*}$ должны были преобразовываться как ковариантные компоненты спинора; другими словами, преобразование (17,1) должно было быть унитарным ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). В релятивистской же теории плотность частиц не является скаляром; она представляет собой временную компоненту 4-вектора. В связи с этим указанное требование отпадает и на коэффициенты преобразования не накладывается теперь никаких дополнительных (помимо (17,2)) условий. Четыре комплексные величины α, β, γ, δ при одном лишь условии (17,2) эквивалентны $8 - 2 = 6$ вещественным параметрам — в соответствии с числом углов, определяющих вращение 4-системы координат (повороты в шести координатных плоскостях).

Таким образом, комплексно-сопряженные бинарные преобразования оказываются существенно различными, так что в релятивистской теории существует два типа спиноров. Чтобы различить эти типы, приняты специальные обозначения: индексы спиноров, преобразующихся по формулам, комплексно-сопряженным формулам (17,1), записываются в виде цифр с точками над ними (*пунктирные индексы*). Таким образом, по определению,

$$\eta^{\dot\alpha} \sim \xi^{\alpha*}, \tag{17,7}$$

---

[1]) Спинорные индексы будем обозначать первыми буквами греческого алфавита: α, β, γ, ...

где знак $\sim$ означает «преобразуется как». Другими словами, формулы преобразования «пунктирного» спинора:

$$\eta^{\dot 1\prime} = \alpha^*\eta^{\dot 1} + \beta^*\eta^{\dot 2}, \quad \eta^{\dot 2\prime} = \gamma^*\eta^{\dot 1} + \delta^*\eta^{\dot 2}. \tag{17,8}$$

Операции опускания и поднимания пунктирных индексов производятся так же, как и для непунктирных индексов:

$$\eta_{\dot 1} = \eta^{\dot 2}, \quad \eta_{\dot 2} = -\eta^{\dot 1}. \tag{17,9}$$

По отношению к пространственным вращениям поведение 4-спиноров совпадает с поведением 3-спиноров. У последних, как мы знаем, $\overset{*}{\psi}_\alpha \sim \psi^\alpha$. В силу определения (17,7) 4-спинор $\eta_{\dot\alpha}$ ведет себя, следовательно, при вращениях как контравариантный 3-спинор ψ^α. Собственным значениям проекции спина $^1/_2$ и $-^1/_2$ соответствуют поэтому ковариантные компоненты $\eta_{\dot 1}$ и $\eta_{\dot 2}$.

Спиноры высших рангов определяются как совокупности величин, преобразующихся как произведения компонент нескольких спиноров первого ранга. При этом среди индексов спинора высшего ранга могут быть как пунктирные, так и непунктирные. Например, существует три типа спиноров второго ранга:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta, \quad \zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot\beta}, \quad \eta^{\dot\alpha\dot\beta} \sim \eta^{\dot\alpha} H^{\dot\beta}.$$

Тем самым указание одного лишь полного ранга спинора недостаточно для однозначного определения этого понятия; мы будем поэтому при необходимости указывать ранг в виде пары чисел (k, l) — числá непунктирных и числа пунктирных индексов.

Поскольку преобразования (17,1) и (17,8) алгебраически независимы, нет необходимости фиксировать последовательность пунктирных и непунктирных индексов (в этом смысле, например, спиноры $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ и $\zeta^{\dot\beta\alpha}$ — одно и то же).

Для того чтобы иметь инвариантный характер, всякое спинорное равенство должно содержать с обеих сторон одинаковое число непунктирных и пунктирных индексов; в противном случае оно заведомо нарушится при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом надо помнить, что комплексное сопряжение подразумевает замену пунктирных индексов непунктирными и наоборот. Поэтому имеет инвариантный характер соотношение $\eta^{\dot\alpha\dot\beta} = (\xi^{\alpha\beta})^*$ между двумя спинорами.

Свертывание спиноров или их произведений может производиться лишь по парам индексов одинакового рода — двум пунктирным или двум непунктирным. Суммирование же по паре индексов различного рода — не инвариантная операция. Поэтому из спинора

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_l}, \tag{17,10}$$

симметричного по всем k непунктирным и по всем l пунктирным индексам, нельзя образовать спинор более низкого ранга (напомним, что упрощение по паре индексов, относительно которых спинор симметричен, дает в результате нуль). Это значит, что из величин (17,10) нельзя составить меньшего числа каких-либо их линейных комбинаций, которые бы преобразовывались друг через друга при всех преобразованиях группы. Другими словами, симметричные 4-спиноры реализуют неприводимые представления собственной группы Лоренца. Каждое неприводимое представление задается парой чисел (k, l).

Поскольку каждый спинорный индекс пробегает два значения, имеется $k+1$ существенно различных наборов чисел $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ в (17,10) (содержащих 0, 1, 2, ..., k единиц и k, $k-1$, ..., 0 двоек) и $l+1$ наборов чисел $\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_l$. Всего, следовательно, симметричный спинор ранга (k, l) имеет $(k+1)(l+1)$ независимых компонент; это и есть размерность осуществляемого им неприводимого представления.

§ 18. Связь спиноров с 4-векторами

Спинор $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ с одним пунктирным и одним непунктирным индексом имеет $2\cdot 2 = 4$ независимые компоненты — как раз столько, сколько компонент имеет 4-вектор. Ясно поэтому, что тот и другой реализуют одно и то же неприводимое представление собственной группы Лоренца, и между их компонентами должно иметься определенное соответствие.

Для установления этого соответствия обратимся прежде всего к аналогичному соответствию в трехмерном случае, учитывая, что по отношению к чисто пространственным вращениям поведение 3- и 4-спиноров должно быть одинаковым.

Для трехмерного спинора $\psi^{\alpha\beta}$ имеют место формулы соответствия (см. III, § 57), которые мы запишем здесь в виде

$$a_x = \frac{1}{2}(\psi^{22} - \psi^{11}) = \frac{1}{2}(\psi^2{}_1 + \psi^1{}_2),$$

$$a_y = -\frac{i}{2}(\psi^{22} + \psi^{11}) = \frac{i}{2}(\psi^1{}_2 - \psi^2{}_1),$$

$$a_z = \frac{1}{2}(\psi^{12} + \psi^{21}) = \frac{1}{2}(\psi^1{}_1 - \psi^2{}_2),$$

где a_x, a_y, a_z — компоненты некоторого трехмерного вектора $\mathbf{a}$. Переходя к четырехмерному случаю, надо заменить компоненты