индексов различного рода — не инвариантная операция. Поэтому из спинора

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot\beta_1\dot\beta_2\ldots\dot\beta_l}, \qquad (17,10)$$

симметричного по всем k непунктирным и по всем l пунктирным индексам, нельзя образовать спинор более низкого ранга (напомним, что упрощение по паре индексов, относительно которых спинор симметричен, дает в результате нуль). Это значит, что из величин (17,10) нельзя составить меньшего числа каких-либо их линейных комбинаций, которые бы преобразовывались друг через друга при всех преобразованиях группы. Другими словами, симметричные 4-спиноры реализуют неприводимые представления собственной группы Лоренца. Каждое неприводимое представление задается парой чисел (k, l).

Поскольку каждый спинорный индекс пробегает два значения, имеется $k+1$ существенно различных наборов чисел $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ в (17,10) (содержащих 0, 1, 2, ..., k единиц и k, $k-1$, ..., 0 двоек) и $l+1$ наборов чисел $\dot\beta_1\dot\beta_2\ldots\dot\beta_l$. Всего, следовательно, симметричный спинор ранга (k, l) имеет $(k+1)(l+1)$ независимых компонент; это и есть размерность осуществляемого им неприводимого представления.

§ 18. Связь спиноров с 4-векторами

Спинор $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ с одним пунктирным и одним непунктирным индексом имеет $2\cdot 2=4$ независимые компоненты — как раз столько, сколько компонент имеет 4-вектор. Ясно поэтому, что тот и другой реализуют одно и то же неприводимое представление собственной группы Лоренца, и между их компонентами должно иметься определенное соответствие.

Для установления этого соответствия обратимся прежде всего к аналогичному соответствию в трехмерном случае, учитывая, что по отношению к чисто пространственным вращениям поведение 3- и 4-спиноров должно быть одинаковым.

Для трехмерного спинора $\psi^{\alpha\beta}$ имеют место формулы соответствия (см. III, § 57), которые мы запишем здесь в виде

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2}(\psi^{22}-\psi^{11}) = \frac{1}{2}(\psi^2{}_1+\psi^1{}_2),\\ a_y &= -\frac{i}{2}(\psi^{22}+\psi^{11}) = \frac{i}{2}(\psi^1{}_2-\psi^2{}_1),\\ a_z &= \frac{1}{2}(\psi^{12}+\psi^{21}) = \frac{1}{2}(\psi^1{}_1-\psi^2{}_2), \end{aligned}$$

где a_x, a_y, a_z — компоненты некоторого трехмерного вектора $\mathbf{a}$. Переходя к четырехмерному случаю, надо заменить компоненты

$\psi^{\alpha}{}_{\beta}$ на $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, а под a_x, a_y, a_z понимать контравариантные компоненты a^1, a^2, a^3 4-вектора. Что же касается выражения для четвертой компоненты вектора, a^0, то его вид заранее ясен из отмеченного в § 17 обстоятельства: величина (17,6) должна преобразовываться как a^0. Поэтому $a^0 \sim \zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}$; коэффициент пропорциональности определяется так, чтобы скаляр $\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta}$ совпадал со скаляром $2a_{\mu}a^{\mu} \equiv 2a^2$.

Таким образом, мы приходим к следующим формулам соответствия:

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot2} + \zeta^{2\dot1}), & a^2 &= \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot2} - \zeta^{2\dot1}), \\ a^3 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} - \zeta^{2\dot2}), & a^0 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}). \end{aligned} \tag{18,1}$$

Обратные формулы:

$$\begin{aligned} \zeta^{1\dot1} &= \zeta_{2\dot2} = a^3 + a^0, & \zeta^{2\dot2} &= \zeta_{1\dot1} = a^0 - a^3, \\ \zeta^{1\dot2} &= -\zeta_{2\dot1} = a^1 - ia^2, & \zeta^{2\dot1} &= -\zeta_{1\dot2} = a^1 + ia^2. \end{aligned} \tag{18,2}$$

При этом

$$\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta} = 2a^2. \tag{18,3}$$

Отметим также, что

$$\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\gamma\dot\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha}a^2. \tag{18,4}$$

Последнее равенство следует из того, что спинор второго ранга $\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\dot\beta}_{\gamma}$ антисимметричен по индексам $\alpha\gamma$ и потому пропорционален метрическому спинору.

Соответствие между спинором $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ и 4-вектором является частным случаем общего правила: всякий симметричный спинор ранга (k, k) эквивалентен симметричному неприводимому (т. е. обращающемуся в нуль при упрощении по любой паре индексов) 4-тензору ранга k.

Связь между спинором и 4-вектором можно записать в компактном виде с помощью двухрядных матриц Паули[1]):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18,5}$$

Если обозначить символически посредством ζ матрицу величин $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ с верхними индексами (причем первый — непунктирный), то

---

[1]) Для упрощения обозначений операторы (матрицы), действующие на спиновые переменные, будем обозначать буквами без шляпок.

формулы (18,2) записываются в виде

$$\zeta = \mathbf{a}\sigma + a^0 \tag{18,6}$$

(во втором члене подразумевается, конечно, произведение a^0 на единичную матрицу). Обратные формулы:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\zeta\sigma), \quad a^0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta. \tag{18,7}$$

С помощью формул (18,6—7) можно установить связь между законами преобразования 4-вектора и спинора и тем самым выразить закон преобразования спинора через параметры поворотов 4-системы координат.

Запишем преобразование спинора ξ^α в виде

$$\xi^{\alpha\prime} = (B\xi)^\alpha, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{18,8}$$

где B — двухрядная матрица, составленная из коэффициентов бинарного преобразования. Тогда преобразование пунктирного спинора:

$$\eta^{\dot\beta\prime} = (B^*\eta)^{\dot\beta} = (\eta B^+)^{\dot\beta}, \tag{18,9}$$

а преобразование спинора второго ранга $\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha\eta^{\dot\beta}$ запишем символически как $\zeta' = B\zeta B^+$ [1]). При бесконечно малом преобразовании $B = 1 + \lambda$, где λ — малая матрица, и с точностью до малых величин первого порядка

$$\zeta' = \zeta + (\lambda\zeta + \zeta\lambda^+). \tag{18,10}$$

Рассмотрим сначала преобразование Лоренца к системе отсчета, движущейся с бесконечно малой скоростью $\delta\mathbf{V}$ (без изменения направления пространственных осей). При этом 4-вектор $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ преобразуется согласно

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - a^0\,\delta\mathbf{V}, \quad a^{0\prime} = a^0 - \mathbf{a}\,\delta\mathbf{V}. \tag{18,11}$$

Воспользуемся теперь формулами (18,7). Преобразование a^0 можно представить, с одной стороны, как

$$a^{0\prime} = a^0 - \mathbf{a}\,\delta\mathbf{V} = a^0 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\zeta\sigma\,\delta\mathbf{V}),$$

а с другой стороны, как

$$a^{0\prime} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+) = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta(\lambda + \lambda^+).$$

---

[1]) Для ковариантных компонент:

$$\xi'_\alpha = (\tilde{B}^{-1}\xi)_\alpha = (\xi B^{-1})_\alpha, \quad \eta'_{\dot\alpha} = (\eta B^{*-1})_{\dot\alpha} \tag{18,8a}$$

(так, чтобы произведение двух спиноров $\xi_\alpha \Xi^\alpha$ оставалось инвариантным).

Эти выражения должны совпадать тождественно (т. е. при произвольном ζ). Отсюда находим следующее равенство:

$$\lambda + \lambda^{+} = -\boldsymbol{\sigma}\,\delta\mathbf{V}.$$

Таким же способом, рассмотрев преобразование **a**, получим

$$\boldsymbol{\sigma}\lambda + \lambda^{+}\boldsymbol{\sigma} = -\delta\mathbf{V}.$$

Эти равенства как уравнения для λ имеют следующее решение:

$$\lambda = \lambda^{+} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\delta\mathbf{V}.$$

Таким образом, бесконечно малое преобразование Лоренца спинора ξ^{α} осуществляется матрицей

$$B = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\,\delta V, \qquad (18,12)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении скорости $\delta\mathbf{V}$. Отсюда легко найти преобразование и для конечной скорости $\mathbf{V}$. Для этого вспомним, что преобразование Лоренца означает (геометрически) поворот 4-системы координат в плоскости t, $\mathbf{n}$ на угол φ, связанный со скоростью $\mathbf{V}$ равенством $\operatorname{th}\varphi = V$[1]). Бесконечно малому преобразованию соответствует угол $\delta\varphi = \delta V$, а поворот на конечный угол φ осуществляется $\varphi/\delta\varphi$-кратным повторением поворота на $\delta\varphi$. Возводя оператор (18,12) в степень $\varphi/\delta\varphi$ и переходя к пределу $\delta\varphi \to 0$, получаем

$$B = e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}. \qquad (18,13)$$

Математический смысл действия этого оператора выясняется, если заметить, что по свойствам матриц Паули все четные степени от $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ равны 1, а все нечетные степени равны $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$. Учитывая, что ch разлагается по четным, а sh — по нечетным степеням аргумента, получаем окончательно

$$B = \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} - \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}, \qquad \operatorname{th}\varphi = V. \qquad (18,14)$$

Отметим, что матрицы B преобразований Лоренца оказываются эрмитовыми: $B = B^{+}$.

Рассмотрим теперь бесконечно малый поворот пространственной системы координат. При этом трехмерный вектор **a** преобразуется согласно

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - [\delta\boldsymbol{\theta}\mathbf{a}], \qquad (18,15)$$

[1]) Напомним, что в плоскостях, содержащих ось времени, метрика псевдоевклидова.

где $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор бесконечно малого угла поворота. Соответствующее преобразование спинора можно было бы найти аналогичным образом. В этом, однако, нет необходимости, так как по отношению к пространственным поворотам поведение 4-спиноров совпадает с поведением 3-спиноров, а для последних преобразование известно заранее из общей связи оператора спина с оператором бесконечо малого поворота:

$$B = 1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\delta\boldsymbol{\theta}. \tag{18,16}$$

Переход к повороту на конечный угол θ производится аналогично переходу от (18,12) к (18,14):

$$B = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{18,17}$$

где $\mathbf{n}$ — орт оси вращения. Эта матрица унитарна ($B^{+} = B^{-1}$), как и должно быть для пространственного поворота.

§ 19. Инверсия спиноров

При изложении (в т. III) трехмерной теории спиноров мы не рассматривали их поведения по отношению к операции пространственной инверсии, поскольку в нерелятивистской теории это не привело бы к каким-либо новым физическим результатам. Остановимся, однако, теперь на этом вопросе для лучшего уяснения последующего рассмотрения инверсионных свойств 4-спиноров.

Операция инверсии не меняет знака аксиального вектора, каковым является вектор спина. Поэтому не меняется и значение его проекции s_z. Отсюда следует, что при инверсии каждая из компонент спинора ψ^{α} может преобразовываться только через саму себя, т. е. должно быть

$$\psi^{\alpha} \to P\psi^{\alpha}, \tag{19,1}$$

где P — постоянный коэффициент. Произведя инверсию дважды, мы вернемся к исходной системе координат. В случае спиноров, однако, возвращение к начальному положению можно понимать в двух различных смыслах: как поворот системы на 0° или на 360°. Для спиноров эти два определения не эквивалентны, так как ψ^{α} меняют знак при повороте на 360°. Таким образом, возможны две альтернативные концепции инверсии: в одном случае

$$P^2 = 1, \quad P = \pm 1, \tag{19,2}$$

а в другом

$$P^2 = -1, \quad P = \pm i. \tag{19,3}$$