где $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор бесконечно малого угла поворота. Соответствующее преобразование спинора можно было бы найти аналогичным образом. В этом, однако, нет необходимости, так как по отношению к пространственным поворотам поведение 4-спиноров совпадает с поведением 3-спиноров, а для последних преобразование известно заранее из общей связи оператора спина с оператором бесконечно малого поворота:

$$B = 1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\delta\boldsymbol{\theta}. \tag{18,16}$$

Переход к повороту на конечный угол θ производится аналогично переходу от (18,12) к (18,14):

$$B = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{18,17}$$

где $\mathbf{n}$ — орт оси вращения. Эта матрица унитарна ($B^+ = B^{-1}$), как и должно быть для пространственного поворота.

§ 19. Инверсия спиноров

При изложении (в т. III) трехмерной теории спиноров мы не рассматривали их поведения по отношению к операции пространственной инверсии, поскольку в нерелятивистской теории это не привело бы к каким-либо новым физическим результатам. Остановимся, однако, теперь на этом вопросе для лучшего уяснения последующего рассмотрения инверсионных свойств 4-спиноров.

Операция инверсии не меняет знака аксиального вектора, каковым является вектор спина. Поэтому не меняется и значение его проекции s_z. Отсюда следует, что при инверсии каждая из компонент спинора ψ^α может преобразовываться только через саму себя, т. е. должно быть

$$\psi^\alpha \to P\psi^\alpha, \tag{19,1}$$

где P — постоянный коэффициент. Произведя инверсию дважды, мы вернемся к исходной системе координат. В случае спиноров, однако, возвращение к начальному положению можно понимать в двух различных смыслах: как поворот системы на 0° или на 360°. Для спиноров эти два определения не эквивалентны, так как ψ^α меняют знак при повороте на 360°. Таким образом, возможны две альтернативные концепции инверсии: в одном случае

$$P^2 = 1, \quad P = \pm 1, \tag{19,2}$$

а в другом

$$P^2 = -1, \quad P = \pm i. \tag{19,3}$$

Существенно при этом, что понятие инверсии должно быть определено одинаково для всех спиноров. Недопустимо, чтобы различные спиноры вели себя при инверсии различным образом (согласно (19,2) или (19,3)), так как тогда не из всяких двух спиноров можно было бы построить скаляр (или псевдоскаляр): если бы спинор ψ^α преобразовывался согласно (19,2), а φ^α — согласно (19,3), то величина $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ умножилась бы при инверсии на $\pm i$ вместо того, чтобы оставаться неизменной (или менять только знак).

Следует также подчеркнуть, что (при любом определении инверсии) приписывание спинору той или иной четности P не имеет абсолютного смысла, поскольку спиноры меняют знак при повороте на 2π, который всегда можно произвести одновременно с инверсией. Абсолютный характер, однако, имеет «относительная четность» двух спиноров, определяемая как четность составленного из них скаляра $\psi^\alpha\varphi_\alpha$; поскольку при повороте на 2π меняют знак одновременно все спиноры, связанная с этим неопределенность не отражается на четности указанного скаляра.

Обратимся теперь к четырехмерным спинорам.

Отметим прежде всего, что поскольку инверсия меняет знак лишь трех (x, y, z) из четырех (t, x, y, z) координат, она коммутативна с пространственными вращениями, но не коммутативна с преобразованиями, поворачивающими ось t. Если L есть преобразование Лоренца к системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, то $\hat{P}\hat{L}=\hat{L}'\hat{P}$, где $\hat{L}'$ — преобразование к системе, движущейся со скоростью $-\mathbf{V}$.

Отсюда следует, что при инверсии компоненты 4-спинора ξ^α не могут преобразовываться через самих себя. Если бы инверсия спинора ξ^α заключалась по-прежнему в преобразовании (19,1) (т. е. изображалась бы матрицей, пропорциональной единичной матрице), то она коммутировала бы со всеми вообще преобразованиями Лоренца, чего заведомо не должно быть (так как операции $\hat{L}$ и $\hat{L}'$ в применении к ξ^α заведомо не совпадают).

Таким образом, инверсия должна преобразовывать компоненты спинора ξ^α через другие величины. Таковыми могут быть лишь компоненты некоторого другого спинора $\eta^{\dot\alpha}$, не совпадающего по своим трансформационным свойствам с ξ^α. Поскольку инверсия не меняет (как уже отмечалось выше) z-проекции спина, компоненты ξ^1 и ξ^2 могут перейти при инверсии лишь в компоненты $\eta_{\dot 1}$ и $\eta_{\dot 2}$, отвечающие тем же значениям $s_z = {}^1/_2$ и $s_z = -{}^1/_2$. Понимая под инверсией операцию, дающую 1 при двукратном повторении, можно определить ее действие формулами

$$\xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha. \qquad (19,4)$$

Для ковариантных компонент ξ_α и контравариантных $\eta^{\dot\alpha}$ эти преобразования имеют обратный знак:

$$\xi_\alpha \to -\eta^{\dot\alpha}, \quad \eta^{\dot\alpha} \to -\xi_\alpha, \tag{19,4a}$$

так как опускание и поднимание одного и того же индекса происходит с различными знаками, см. (17,5) и (17,9) [1]). Если же инверсия понимается в таком смысле, что $P^2 = -1$, то ее действие определяется формулами

$$\xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{19,5}$$

или, что то же,

$$\xi_\alpha \to -i\eta^{\dot\alpha}, \quad \eta^{\dot\alpha} \to -i\xi_\alpha. \tag{19,5a}$$

Некоторое различие в характере двух определений инверсии состоит в том, что при втором определении комплексно-сопряженные спиноры преобразуются одинаково: если $\Xi_\alpha = \overset{*}{\eta}_{\dot\alpha}$, $\mathrm{H}^{\dot\alpha} = \xi^{\alpha *}$, то из (19,5) будем иметь $\Xi_\alpha \to -i\mathrm{H}^{\dot\alpha}$, $\mathrm{H}^{\dot\alpha} \to -i\Xi_\alpha$, т. е. такое же правило, как и для ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. При определении же (19,4) мы получили бы преобразование $\Xi_\alpha \to \mathrm{H}^{\dot\alpha}$, $\mathrm{H}^{\dot\alpha} \to \Xi_\alpha$, обратное по знаку преобразованию спиноров ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. К возможным физическим аспектам этого различия мы вернемся в § 27.

Ниже будем для определенности везде подразумевать определение (19,5).

По отношению к подгруппе вращений спиноры ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$ преобразуются, как мы знаем, одинаково. Образовав из их компонент комбинации

$$\xi^\alpha \pm \eta_{\dot\alpha}, \tag{19,6}$$

мы получили бы величины, преобразующиеся при инверсии согласно (19,1) с $P = \pm i$. Эти комбинации, однако, не ведут себя как спиноры по отношению ко всем преобразованиям группы Лоренца.

Таким образом, включение инверсии в группу симметрии требует одновременного рассмотрения пары спиноров $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$; такую пару называют *биспинором* первого ранга). Четыре компоненты биспинора реализуют одно из неприводимых представлений расширенной группы Лоренца.

---

[1]) Определение (19,4), конечно, в известном смысле условно, что связано с независимостью величин ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$. Так, введя вместо $\eta_{\dot\alpha}$ новый спинор $\eta'_{\dot\alpha} = e^{i\delta}\eta_{\dot\alpha}$, получим вместо (19,4) эквивалентное определение:

$$\xi^\alpha \to e^{-i\delta}\eta'_{\dot\alpha}, \quad \eta'_{\dot\alpha} \to e^{i\delta}\xi^\alpha.$$

Скалярное произведение двух биспиноров $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ и $(\Xi^\alpha, \mathrm{H}_{\dot\alpha})$ может быть образовано двумя способами. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}^{\dot\alpha} \tag{19,7}$$

при инверсии вообще не меняется, т. е. является истинным скаляром. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}^{\dot\alpha} \tag{19,8}$$

тоже инвариантна по отношению к поворотам 4-системы координат, но меняет знак при инверсии; другими словами, она является псевдоскаляром.

Двумя способами может быть определен также и спинор второго ранга $\zeta^{\alpha\dot\beta}$. Определив его законом преобразования

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha \mathrm{H}^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}, \tag{19,9}$$

мы получим величины, преобразующиеся при инверсии согласно

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to \zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19,10}$$

При этом 4-вектор a^μ, которому эквивалентен такой спинор, преобразуется (в соответствии с формулами (18,1)) согласно $(a^0, \mathbf{a}) \to (a^0, -\mathbf{a})$, т. е. является истинным 4-вектором (а трехмерный вектор $\mathbf{a}$ — полярным вектором).

Можно, однако, определить $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ также и согласно

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha \mathrm{H}^{\dot\beta} - \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}. \tag{19,11}$$

Тогда [1])

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to -\zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19,12}$$

Такому спинору соответствует 4-вектор, для которого инверсия означает преобразование $(a^0, \mathbf{a}) \to (-a^0, \mathbf{a})$, т. е. 4-псевдовектор (трехмерный же вектор $\mathbf{a}$ аксиален).

Симметричные спиноры второго ранга с индексами одинакового типа определяются законами преобразования:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta + \xi^\beta \Xi^\alpha, \quad \eta_{\dot\alpha\dot\beta} \sim \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}_{\dot\beta} + \eta_{\dot\beta} \mathrm{H}_{\dot\alpha}. \tag{19,13}$$

При инверсии они переходят один в другой:

$$\xi^{\alpha\beta} \to -\eta_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{19,14}$$

---

[1]) Подчеркнем, что законы преобразований (19,10) и (19,12), различающиеся знаком в правой стороне, отнюдь не эквивалентны, поскольку в обеих их сторонах стоят компоненты одного и того же спинора (ср. примеч. на с. 93).

Пара $(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ образует биспинор второго ранга. Число его независимых компонент равно $3+3=6$. Столько же независимых компонент имеет антисимметричный 4-тензор второго ранга $a^{\mu\nu}$. Поэтому между тем и другим должно существовать определенное соответствие (оба реализуют эквивалентные неприводимые представления расширенной группы Лоренца).

Поскольку по отношению к собственной группе Лоренца спиноры $\xi^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ преобразуются независимо, то и из компонент 4-тензора $a^{\mu\nu}$ могут быть составлены две группы величин, преобразующихся только друг через друга при всех поворотах 4-системы координат. Это разбиение осуществляется следующим образом.

Введем трехмерный полярный вектор $\mathbf{p}$ и трехмерный аксиальный вектор $\mathbf{a}$, связанные с компонентами 4-тензора $a^{\mu\nu}$ согласно

$$a^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \qquad (19{,}15)$$

($(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ — краткое обозначение, которое мы будем применять для перечисления компонент такого тензора). При этом $a_{\mu\nu} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$, а из двух величин

$$\mathbf{a}^2-\mathbf{p}^2=\frac{1}{2}a_{\mu\nu}a^{\mu\nu}, \qquad \mathbf{ap}=\frac{1}{8}e_{\mu\nu\rho\sigma}a^{\mu\nu}a^{\rho\sigma}$$

первая является скаляром, а вторая псевдоскаляром; по отношению к собственной группе Лоренца тот и другой одинаково инвариантны. Вместе с ними инвариантны также и квадраты трехмерных векторов $\mathbf{f}^{\pm}=\mathbf{p}\pm i\mathbf{a}$. Это значит, что всякий поворот в 4-пространстве для векторов $\mathbf{f}^{\pm}$ эквивалентен «повороту» в трехмерном пространстве, вообще говоря, на комплексные углы (шести углам поворота в 4-пространстве соответствуют три комплексных «угла поворота» трехмерной системы). Операция же пространственной инверсии, меняя знак $\mathbf{p}$ (но не $\mathbf{a}$), переводит векторы $\mathbf{f}^{+}$ и $-\mathbf{f}^{-}$ друг в друга. Компоненты этих векторов и составляют искомые две группы величин, образованных из компонент тензора $a^{\mu\nu}$.

Тем самым становится очевидным также и соответствие между компонентами 4-тензора $a^{\mu\nu}$ и спиноров $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Поскольку в группу Лоренца входят в качестве подгруппы пространственные вращения, соотношения между компонентами спинора и компонентами трехмерного вектора должны быть такими же, как для трехмерных спиноров:

$$f_x^+=\frac{1}{2}(\xi^{22}-\xi^{11}),\quad f_y^+=\frac{i}{2}(\xi^{22}+\xi^{11}),\quad f_z^+=\xi^{12};$$
$$f_x^-=\frac{1}{2}(\eta_{\dot 2\dot 2}-\eta_{\dot 1\dot 1}),\quad f_y^-=\frac{i}{2}(\eta_{\dot 2\dot 2}+\eta_{\dot 1\dot 1}),\quad f_z^-=\eta_{\dot 1\dot 2}. \qquad (19,16)$$

Задача

Установить общее соответствие между спинорами четного ранга и 4-тензорами.

Решение. Все спиноры с четными $k+l$ реализуют однозначные неприводимые представления расширенной группы Лоренца и поэтому эквивалентны 4-тензорам, реализующим такие же представления [1]).

Спинор ранга (k, k) преобразуется при инверсии согласно

$$\zeta^{\alpha\beta\ldots\dot\gamma\dot\delta\ldots}\to\pm\zeta_{\dot\alpha\dot\beta\ldots\gamma\delta\ldots}. \qquad (1)$$

Такой спинор эквивалентен симметричному неприводимому 4-тензору ранга k — истинному или псевдотензору в зависимости от знака в (1).

Спиноры рангов (k, l) и (l, k), составляющие биспинор, преобразуются при инверсии согласно

$$\zeta^{\overbrace{\alpha\beta\ldots}^{k}\overbrace{\dot\gamma\dot\delta\ldots}^{l}}\to(-1)^{\frac{k-l}{2}}\chi_{\underbrace{\dot\alpha\dot\beta\ldots}_{k}\underbrace{\gamma\delta\ldots}_{l}}. \qquad (2)$$

При $l=k+2$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}$ ранга $k+2$, антисимметричному по индексам $[\mu\nu]$ и симметричному по всем остальным индексам. Неприводимость этого тензора означает, что он дает нуль при упрощении по любой паре индексов и дает нуль при образовании дуального по любым трем индексам $\left(\text{т. е. } e^{\lambda\mu\nu o}a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}=0\right)$; последнее условие означает, что тензор дает нуль при взятии циклической суммы по трем индексам — $\mu\nu$ и одному (любому) из остальных.

При $l=k+4$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору $a_{[\lambda\mu][\nu\rho]\sigma\tau\ldots}$ ранга $k+4$ со следующими свойствами: он антисимметричен по парам индексов $[\lambda\mu]$ и $[\nu\rho]$, симметричен по всем остальным, симметричен по отношению к перестановке пары $[\lambda\mu]$ с парой $[\nu\rho]$, дает нуль при упрощении по любой паре индексов и дает нуль при образовании дуального по любой тройке индексов.

Вообще, при $l=k+2n$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору ранга $k+2n$, антисимметричному по n парам индексов и симметричному по остальным k индексам. 4-тензоры, антисимметричные по большему числу (тройкам, четверкам и т. д.) индексов, в этой классификации не появляются по очевидной причине: антисимметричный тензор третьего ранга эквивалентен (дуален) псевдовектору, а антисимметричный тензор четвертого ранга сводится к скаляру (пропорционален единичному псевдотензору $e^{\lambda\mu\nu\rho}$); антисимметрия же по еще большему числу индексов в 4-пространстве вообще невозможна.

[1]) Спиноры же нечетного ранга осуществляют двузначные представления группы: пространственный поворот на 360° меняет знак спиноров, так что каждому элементу группы отвечают две матрицы противоположного знака.