§ 20. Уравнение Дирака в спинорном представлении

Частица со спином $^1/_2$ описывается в своей системе покоя двухкомпонентной волновой функцией — 3-спинором. По своему «четырехмерному происхождению» это может быть как непунктирный, так и пунктирный 4-спинор. В описании частицы в произвольной системе отсчета участвуют оба таких 4-спинора; обозначим их посредством ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$ [1]).

Для свободной частицы единственным оператором, входящим в волновое уравнение, может быть (как уже указывалось в § 10) лишь оператор 4-импульса $\hat p_\mu = i\partial_\mu$. В спинорных обозначениях этому 4-вектору соответствует операторный спинор $\hat p_{\alpha\dot\beta}$, причем

$$\begin{aligned} \hat p^{1\dot 1} &= \hat p_{2\dot 2} = \hat p_z + \hat p_0, & \hat p^{2\dot 2} &= \hat p_{1\dot 1} = \hat p_0 - \hat p_z, \\ \hat p^{1\dot 2} &= -\hat p_{2\dot 1} = \hat p_x - i\hat p_y, & \hat p^{2\dot 1} &= -\hat p_{1\dot 2} = \hat p_x + i\hat p_y. \end{aligned} \tag{20,1}$$

Волновое уравнение представляет собой линейную дифференциальную связь между компонентами спиноров, осуществляемую с помощью оператора $\hat p_{\alpha\dot\beta}$. Требование релятивистской инвариантности фиксирует следующую систему уравнений:

$$\hat p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = m\xi^\alpha, \quad \hat p_{\dot\beta\alpha}\xi^\alpha = m\eta_{\dot\beta}, \tag{20,2}$$

где m — размерная постоянная. Вводить в эти два уравнения различные постоянные m_1 и m_2 (или же изменить знак перед m) было бы бессмысленно, так как надлежащим переопределением ξ^α или $\eta_{\dot\alpha}$ уравнения все равно могли бы быть приведены к прежнему виду.

Исключим из уравнений (20,2) один из двух спиноров, подставив $\eta_{\dot\beta}$ из второго уравнения в первое:

$$\hat p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = \frac{1}{m}\hat p^{\alpha\dot\beta}\hat p_{\dot\beta\gamma}\xi^\gamma = m\xi^\alpha.$$

Но согласно (18,4) $\hat p^{\alpha\dot\beta}\hat p_{\dot\beta\gamma} = \hat p^2\delta^\alpha_\gamma$, так что получаем

$$(\hat p^2 - m^2)\xi^\gamma = 0, \tag{20,3}$$

откуда видно, что m — масса частицы.

Обратим внимание на то, что необходимость введения массы в волновое уравнение требует одновременного рассмотрения

---

[1]) Трехмерный спинор первого ранга может «происходить» также от 4-спиноров более высоких нечетных рангов, которые в системе покоя становятся антисимметричными по одной или нескольким парам индексов. Такие варианты, однако, привели бы к уравнениям более высоких порядков (ср. примеч. на с. 53).

двух спиноров $\left(\xi^{\alpha}\right.$ и $\left.\eta_{\dot{\alpha}}\right)$: с помощью лишь одного из них нельзя составить релятивистски инвариантное уравнение, которое содержало бы какой-либо размерный параметр. Тем самым волновое уравнение автоматически оказывается инвариантным относительно пространственной инверсии, если определить преобразование волновой функции как

$$P:\ \xi^{\alpha}\to i\eta_{\dot{\alpha}},\quad \eta_{\dot{\alpha}}\to i\xi^{\alpha}. \tag{20,4}$$

Легко видеть, что при такой замене (и одновременной замене $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}\to\hat{p}_{\alpha\dot{\beta}}$, очевидной из формул (20.1)) два уравнения (20,2) переходят друг в друга. Два спинора, переходящих друг в друга при инверсии, составляют четырехкомпонентную величину — биспинор.

Релятивистское волновое уравнение, изображаемое системой (20,2), называется *уравнением Дирака* (оно было установлено *Дираком* в 1928 г.). Для дальнейшего исследования и применения этого уравнения рассмотрим различные формы, в которых оно может быть представлено.

С помощью формулы (18,6) переписываем уравнения (20,2) в виде

$$(\hat{p}_0+\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta=m\xi,\quad (\hat{p}_0-\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\xi=m\eta. \tag{20,5}$$

Здесь символы ξ и η обозначают двухкомпонентные величины — спиноры

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix},\quad \eta=\begin{pmatrix}\eta_{\dot{1}}\\ \eta_{\dot{2}}\end{pmatrix} \tag{20,6}$$

(первый — с верхними, а второй — с нижними индексами), а при умножении матриц σ на любую двухкомпонентную величину f здесь и ниже всегда подразумевается умножение по обычному матричному правилу

$$(\sigma f)_{\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}f_{\beta}. \tag{20,7}$$

Запись f в виде вертикального столбца $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ отвечает тому, что каждая строка в σ перемножается со столбцом f.

Для удобства дальнейших ссылок выпишем здесь еще раз матрицы Паули

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{20,8}$$

и напомним их основные свойства:

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=2\delta_{ik},\quad \sigma_i\sigma_k=ie_{ikl}\sigma_l+\delta_{ik} \tag{20,9}$$

(см. III, § 55).

Напишем также волновое уравнение, которому удовлетворяет комплексно-сопряженная волновая функция, составленная из спиноров

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \quad \eta^* = (\eta^*_{\dot 1}, \eta^*_{\dot 2}). \tag{20,10}$$

Поскольку все операторы $\hat p_\mu$ содержат множитель i, то $\hat p^*_\mu = -\hat p_\mu$. При взятии комплексно-сопряженного от обеих сторон уравнений (20,5) надо также учесть, что в силу эрмитовости матриц $\sigma(\sigma^* = \tilde\sigma)$

$$(\sigma f)^*_\alpha = \sigma^*_{\alpha\beta} f^*_\beta = f^*_\beta \sigma_{\beta\alpha} = (f^*\sigma)_\alpha,$$

и мы получаем уравнения в виде

$$\eta^*(\hat p_0 + \hat{\mathbf p}\sigma) = -m\xi^*, \quad \xi^*(\hat p_0 - \hat{\mathbf p}\sigma) = -m\eta^*. \tag{20,11}$$

В этой форме записи условно подразумевается, что операторы $\hat p^\mu$ действуют на функцию, стоящую слева от них. Запись ξ^* и η^* в виде горизонтальных строк соответствует матричному умножению в этих уравнениях: строка f перемножается со столбцами в матрицах σ:

$$(f^*\sigma)_\alpha = f^*_\beta \sigma_{\beta\alpha}. \tag{20,12}$$

Преобразование инверсии для ξ^*, η^* определяется как комплексно-сопряженное от преобразования (20,4):

$$P\colon\ \xi^{\alpha*} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}, \quad \eta^*_{\dot\alpha} \to -i\xi^{\alpha*}. \tag{20,13}$$

§ 21. Симметричная форма уравнения Дирака

Спинорная форма записи уравнения Дирака является наиболее естественной в том смысле, что она непосредственно выявляет его релятивистскую инвариантность. Однако в применениях могут оказаться более удобными другие представления волнового уравнения, получающиеся путем другого выбора четырех независимых компонент волновой функции.

Будем обозначать четырехкомпонентную волновую функцию символом ψ (с компонентами ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$). В спинорном представлении это есть биспинор:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{21,1}$$

Но с равным правом можно выбрать в качестве независимых компонент ψ любые линейно независимые комбинации компонент спиноров ξ и η [1]). Условимся при этом ограничивать допу-

[1]) Для краткости будем говорить о четырехкомпонентной величине ψ как о биспиноре также и в неспинорных ее представлениях.