Напишем также волновое уравнение, которому удовлетворяет комплексно-сопряженная волновая функция, составленная из спиноров

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \quad \eta^* = \left(\eta^*_{\dot 1}, \eta^*_{\dot 2}\right). \tag{20,10}$$

Поскольку все операторы $\hat p_\mu$ содержат множитель i, то $\hat p^*_\mu = -\hat p_\mu$. При взятии комплексно-сопряженного от обеих сторон уравнений (20,5) надо также учесть, что в силу эрмитовости матриц $\sigma(\sigma^* = \tilde\sigma)$

$$(\sigma f)^*_\alpha = \sigma^*_{\alpha\beta} f^*_\beta = f^*_\beta \sigma_{\beta\alpha} = (f^*\sigma)_\alpha,$$

и мы получаем уравнения в виде

$$\eta^*(\hat p_0 + \hat{\mathbf p}\sigma) = -m\xi^*, \quad \xi^*(\hat p_0 - \hat{\mathbf p}\sigma) = -m\eta^*. \tag{20,11}$$

В этой форме записи условно подразумевается, что операторы $\hat p^\mu$ действуют на функцию, стоящую слева от них. Запись ξ^* и η^* в виде горизонтальных строк соответствует матричному умножению в этих уравнениях: строка f перемножается со столбцами в матрицах σ:

$$(f^*\sigma)_\alpha = f^*_\beta \sigma_{\beta\alpha}. \tag{20,12}$$

Преобразование инверсии для ξ^*, η^* определяется как комплексно-сопряженное от преобразования (20,4):

$$P\colon\ \xi^{\alpha*} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}, \quad \eta^*_{\dot\alpha} \to -i\xi^{\alpha*}. \tag{20,13}$$

§ 21. Симметричная форма уравнения Дирака

Спинорная форма записи уравнения Дирака является наиболее естественной в том смысле, что она непосредственно выявляет его релятивистскую инвариантность. Однако в применениях могут оказаться более удобными другие представления волнового уравнения, получающиеся путем другого выбора четырех независимых компонент волновой функции.

Будем обозначать четырехкомпонентную волновую функцию символом ψ (с компонентами ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$). В спинорном представлении это есть биспинор:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{21,1}$$

Но с равным правом можно выбрать в качестве независимых компонент ψ любые линейно независимые комбинации компонент спиноров ξ и η [1]). Условимся при этом ограничивать допу-

[1]) Для краткости будем говорить о четырехкомпонентной величине ψ как о биспиноре также и в неспинорных ее представлениях.

стимые линейные преобразования лишь требованием унитарности; такие преобразования не меняют составленные из ψ и ψ^* билинейные формы (см. § 28).

В общем случае произвольного выбора компонент ψ уравнение Дирака можно представить в виде

$$p_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\psi_i,$$

где γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) — некоторые четырехрядные матрицы (*матрицы Дирака*). Будем обычно записывать это уравнение в символической форме, опуская матричные индексы:

$$(\gamma p - m)\psi = 0, \tag{21,2}$$

где

$$\gamma p \equiv \gamma^\mu p_\mu = p_0\gamma^0 - \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla, \qquad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Так, спинорной форме уравнения с компонентами ψ из (21,1) соответствуют матрицы [1])

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21,3}$$

как это легко видеть, записав уравнения (20,5) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & p_0 + \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 - \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

и сравнив с (21,2).

В общем случае матрицы γ должны удовлетворять лишь условиям, обеспечивающим равенство $p^2 = m^2$. Для выяснения этих условий умножим уравнение (21,2) слева на γp. Имеем

$$(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu)\psi = m(p_\mu \gamma^\mu)\psi = m^2\psi.$$

Поскольку $p_\mu p_\nu$ — симметричный тензор (все операторы p_μ коммутативны), можно переписать это равенство как

$$\frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi = m^2\psi,$$

откуда видно, что должно быть

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{21,4}$$

Таким образом, все пары различных матриц γ^μ антикоммутативны, а квадраты каждой из них:

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1. \tag{21,5}$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем используется краткая запись четырехрядных матриц через двухрядные: каждый символ в выражениях (21,3) представляет собой двухрядную матрицу.

При произвольном унитарном преобразовании компонент ψ ($\psi' = U\psi$, где U — унитарная четырехрядная матрица) матрицы γ преобразуются согласно

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^{+} \tag{21,6}$$

(так что уравнение $(\gamma\hat{p} - m)\psi = 0$ переходит в $(\gamma'\hat{p} - m)\psi' = 0$). Перестановочные соотношения (21,4) при этом, разумеется, остаются неизменными.

Матрица γ^0 из (21,3) эрмитова, а матрицы $\boldsymbol{\gamma}$ антиэрмитовы. Эти свойства сохраняются и при всяком унитарном преобразовании (21,6), так что мы будем всегда иметь [1]:

$$\boldsymbol{\gamma}^{+} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0. \tag{21,7}$$

Напишем также уравнение для комплексно-сопряженной функции ψ^*. Взяв комплексно-сопряженное от уравнения (21,2), с учетом свойств (21,7) получим

$$(-\hat{p}_0\tilde{\gamma}^0 - \hat{\mathbf{p}}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0.$$

Переставляем ψ^* согласно $\tilde{\gamma}^{\mu}\psi^* = \psi^*\gamma^{\mu}$ и умножаем затем уравнение справа на γ^0; замечая, что $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, и вводя новый биспинор

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0, \quad \psi^* = \bar{\psi}\gamma^0, \tag{21,8}$$

получаем

$$\bar{\psi}(\gamma\hat{p} + m) = 0. \tag{21,9}$$

Как и в (20,11), оператор $\hat{p}$ предполагается здесь действующим на функцию, стоящую слева от него. Функцию $\bar{\psi}$ называют *дираковски-сопряженной* (или релятивистски-сопряженной) функции ψ. Смысл множителя γ^0 в ее определении заключается в том, что (в спинорном представлении) он переставляет спиноры ξ^* и η^* так, что в $\bar{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ первым оказывается (как и в ψ) непунктирный, а вторым — пунктирный спинор; именно по этой причине $\bar{\psi}$ является более естественным (чем ψ^*) «партнером» ψ, когда, например, они фигурируют совместно в различных билинейных комбинациях (см. § 28).

Преобразование инверсии для волновой функции можно представить в виде

$$P:\ \psi \to i\gamma^0\psi, \quad \bar{\psi} \to -i\bar{\psi}\gamma^0. \tag{21,10}$$

При спинорном представлении ψ матрица γ^0 переставляет, как и должно быть при инверсии, компоненты ξ и η. Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразования (21,10) в об-

---

[1] Эти равенства можно записать вместе в виде

$$\gamma^{\lambda+} = \gamma^0\gamma^{\lambda}\gamma^0. \tag{21,7a}$$

щем случае очевидна и непосредственно: заменив в уравнении (21,2) $\hat{\mathbf{p}} \to -\hat{\mathbf{p}}$ и одновременно $\psi \to i\gamma^0\psi$, получим

$$(\hat{p}_0\gamma^0 + \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\gamma} - m)\,\gamma^0\psi = 0.$$

Умножив это уравнение слева на γ^0 и учитывая антикоммутативность γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$, вернемся к исходному уравнению.

Умножив уравнение $(\gamma\hat{p} - m)\psi = 0$ слева на $\bar{\psi}$, а уравнение $\bar{\psi}(\gamma\hat{p} + m) = 0$ справа на ψ и сложив их, получим

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(\hat{p}_\mu\psi) + (\hat{p}_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = \hat{p}_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0,$$

где скобки указывают, на какую функцию распространяется действие оператора $\hat{p}$. Полученное равенство имеет вид уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$, так что величина

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^*\psi,\ \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi) \tag{21,11}$$

представляет собой 4-вектор плотности тока частиц. Отметим, что его временна́я компонента $j^0 = \psi^*\psi$ положительно определена.

Уравнение Дирака можно представить в форме, разрешенной относительно производной по времени:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{21,12}$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан частицы[1]). Для этого достаточно умножить уравнение (21,2) слева на γ^0. Для гамильтониана получается выражение

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m, \tag{21,13}$$

где введено общепринятое обозначение для фигурирующих здесь матриц:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0. \tag{21,14}$$

Отметим, что

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \beta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \tag{21,15}$$

т. е. все матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, β антикоммутируют друг с другом, а их квадраты равны 1; все они эрмитовы. В спинорном представлении

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21,16}$$

---

[1]) Для частицы со спином 0 волновое уравнение не могло быть представлено в таком виде: уравнение (10,5) для скаляра ψ — второго порядка по времени, а система (10,4) уравнений первого порядка для пятикомпонентной величины (ψ, ψ_μ) содержит производные по времени не от всех компонент.

В предельном случае малых скоростей частица должна описываться, как и в нерелятивистской теории, всего одним двухкомпонентным спинором. Действительно, перейдя в уравнениях (20,5) к пределу $\mathbf{p} \to 0$, $\varepsilon \to m$, получим $\xi = \eta$, т. е. оба спинора, составляющие биспинор, совпадают друг с другом. Здесь, однако, проявляется недостаток спинорной формы записи уравнения Дирака: при предельном переходе остаются отличными от нуля все четыре компоненты ψ, хотя в действительности лишь две из них независимы. Более удобно такое представление волновой функции ψ, при котором в пределе две из ее компонент обращаются в нуль.

Соответственно этому введем вместо ξ и η их линейные комбинации φ и χ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta). \tag{21,17}$$

Тогда для покоящейся частицы $\chi = 0$. Это представление ψ будем называть *стандартным*. При инверсии φ и χ преобразуются сами через себя согласно

$$P\colon\ \varphi \to i\varphi, \quad \chi \to -i\chi. \tag{21,18}$$

Уравнения для φ и χ получим, складывая и вычитая уравнения (20,5):

$$\hat{p}_0\varphi - \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}\chi = m\varphi, \quad -\hat{p}_0\chi + \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}\varphi = m\chi. \tag{21,19}$$

Отсюда видно, что стандартному представлению отвечают матрицы

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21,20}$$

Поскольку в (21,17) складываются отдельно первые и вторые компоненты ξ и η, то в стандартном представлении, как и в спинорном, компоненты ψ_1 и ψ_3 отвечают собственным значениям проекции спина $+1/2$, а ψ_2 и ψ_4 — проекции $-1/2$. В обоих этих представлениях, следовательно, матрица $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$, где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{21,21}$$

представляет собой трехмерный оператор спина: при действии $\frac{1}{2}\Sigma_z$ на биспинор, содержащий лишь компоненты ψ_1, ψ_3 или ψ_2, ψ_4, биспинор умножается на $+1/2$ или $-1/2$. В произвольном представлении эта матрица может быть записана в виде

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = -\frac{i}{2}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}] \tag{21,22}$$

(определение γ^5 см. ниже, (22,14)).

Задачи

1. Найти формулы преобразования волновой функции при бесконечно малом преобразовании Лоренца и бесконечно малом пространственном повороте.

Решение. В спинорном представлении ψ при бесконечно малом преобразовании Лоренца

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\delta\mathbf{V}\right)\xi, \quad \eta' = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma\delta\mathbf{V}\right)\eta$$

(см. (18,8), (18,8а), (18,12)). Обе формулы можно записать вместе в виде

$$\psi' = \left(1 - \frac{1}{2}\,\alpha\delta\mathbf{V}\right)\psi. \tag{1}$$

Аналогичным образом закон преобразования при бесконечно малом повороте:

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\,\Sigma\delta\theta\right)\psi. \tag{2}$$

В таком виде формулы справедливы в любом представлении ψ, если понимать под α и Σ матрицы в том же представлении.

Легко проверить, что матрицы α и Σ составляют компоненты антисимметричного «матричного 4-тензора»

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = (\alpha,\ i\Sigma)$$

(перечисление компонент дано по правилу (19,15)). Введем также бесконечно малый антисимметричный тензор $\delta\varepsilon^{\mu\nu} = (\delta\mathbf{V},\ \delta\theta)$. Тогда

$$\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu} = 2i\Sigma\delta\theta - 2\alpha\delta\mathbf{V}$$

и обе формулы (1—2) можно записать в едином виде:

$$\psi' = \left(1 + \frac{1}{4}\,\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}\right)\psi. \tag{3}$$

2. Написать уравнение Дирака в таком представлении, чтобы оно не содержало мнимых коэффициентов (*E. Majorana*, 1937).

Решение. В стандартном представлении в уравнении

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

мнимыми являются лишь матрицы α_y и $i\beta$. Эту мнимость можно устранить, произведя такое преобразование $\psi' = U\psi$, в результате которого мнимая матрица α_y переставится с вещественной матрицей β. Для этого надо положить

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_y + \beta\right) = U^{-1}.$$

Тогда

$$\alpha_x' = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha_y' = \beta, \quad \alpha_z' = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y,$$

и уравнение Дирака приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\alpha_y\right)\psi' = 0,$$

в котором все коэффициенты вещественны.