§ 22. Алгебра матриц Дирака

При вычислениях, связанных с уравнением Дирака, приходится широко пользоваться матрицами γ, не прибегая к их конкретному виду в том или ином определенном представлении. Правила оперирования этими матрицами всецело определяются перестановочными соотношениями

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu, \ \nu = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \tag{22,1}$$

выражающими все их общие свойства.

В этом параграфе мы приведем ряд формул и правил алгебры матриц γ, полезных в различных вычислениях.

«Скалярное произведение» матриц γ самих на себя: $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$. Для краткой записи введем, по аналогии с ковариантными компонентами 4-векторов, обозначение $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Тогда

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \tag{22,2}$$

Если же матрицы γ_μ и γ^μ разделены одним или несколькими множителями γ, то одной или несколькими перестановками множителей (с помощью правила (22,1)) можно привести γ_μ и γ^μ к соседним положениям, после чего суммирование (по μ) совершается согласно (22,2). Таким способом получаются следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu &= 4g^{\lambda\nu}, \\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu &= -2\,\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda, \\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu &= 2\,(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{22,3}$$

Обычно множители $\gamma^\mu, \ldots$ фигурируют в комбинации с различными 4-векторами в виде «скалярных произведений» [1])

$$\gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu. \tag{22,4}$$

Для таких произведений формулы (22,1) принимают вид

$$(a\gamma)(b\gamma) + (b\gamma)(a\gamma) = 2\,(ab), \quad (a\gamma)(a\gamma) = a^2, \tag{22,5}$$

а формулы (22,3):

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\mu(a\gamma)\gamma^\mu &= -2\,(a\gamma), \\ \gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)\gamma^\mu &= 4\,(ab), \\ \gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)\gamma^\mu &= -2\,(c\gamma)(b\gamma)(a\gamma), \\ \gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma)\gamma^\mu &= 2\,[(d\gamma)(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma) + (c\gamma)(b\gamma)(a\gamma)(d\gamma)]. \end{aligned}\right\} \tag{22,6}$$

---

[1]) В этом издании книги мы не пользуемся каким-либо специальным обозначением для такого произведения. В литературе часто используются обозначения буквами со шляпкой или перечеркнутыми буквами.

Широко используемой операцией является взятие следа произведения некоторого числа матриц γ. Рассмотрим величины

$$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = {}^1/_4\,\mathrm{Sp}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right). \tag{22,7}$$

В силу известного свойства следа произведения матриц этот тензор симметричен по отношению к циклическим перестановкам индексов $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$.

Так как матрицы γ имеют одинаковый вид в произвольной системе отсчета, величины T также не зависят от выбора системы. Поэтому они образуют тензор, выражающийся только через обладающий этим свойством метрический тензор $g_{\mu\nu}$.

Но из тензора второго ранга $g_{\mu\nu}$ можно составить лишь тензоры четного ранга. Уже отсюда сразу следует, что след произведения любого нечетного числа множителей γ равен нулю. В частности, равен нулю след каждой из γ [1]:

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu} = 0. \tag{22,8}$$

След единичной четырехрядной матрицы (которая подразумевается стоящей в правой стороне перестановочного соотношения (22,1)) равен 4. Поэтому из (22,1), взяв след от обеих сторон равенства, найдем

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \tag{22,9}$$

След произведения четырех матриц

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \tag{22,10}$$

Эту формулу можно получить, например, «протаскивая» в $\mathrm{Sp}(\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho})$ множитель γ^{λ} направо с помощью перестановочного соотношения (22,1); после каждой перестановки возникает один из фигурирующих в (22,10) членов:

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho}$$

и т. д. После всех перестановок справа остается $-T^{\mu\nu\rho\lambda} = -T^{\lambda\mu\nu\rho}$, которое переносим налево. Этим же способом вычисление следа произведения шести γ сводится к следам произведений четырех множителей и т. д. Так,

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau} - g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau} + g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau} - g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{22,11}$$

Отметим, что все следы $T^{\lambda\mu\ldots}$ вещественны и что они отличны от нуля, лишь если каждая из матриц γ^0, γ^1, ... встре-

[1]) След матрицы инвариантен относительно преобразований $\gamma = U\gamma U^{-1}$. Поэтому (22,8) очевидно и из конкретных выражений матриц (21,3).

чается в произведении четное число раз; то и другое очевидно из полученных формул. Отсюда, в свою очередь, легко заключить, что след не меняется при изменении порядка всех множителей на обратный:

$$T^{\lambda\mu\cdots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\cdots\mu\lambda}. \tag{22,12}$$

Как уже упоминалось, множители γ фигурируют обычно в виде скалярных произведений с различными 4-векторами. В таких случаях, например, формулы (22,9) и (22,10) означают, что

$$\begin{gathered}{}^1/_4\,\mathrm{Sp}\,(a\gamma)(b\gamma) = ab,\\ {}^1/_4\,\mathrm{Sp}\,(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma) = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc).\end{gathered} \tag{22,13}$$

Особую роль играет произведение $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Для него принято специальное обозначение:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{22,14}$$

Легко видеть, что

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \tag{22,15}$$

т. е. матрица γ^5 антикоммутативна со всеми γ^μ. По отношению же к матрицам α и β имеют место правила

$$\alpha\gamma^5 - \gamma^5\alpha = 0, \quad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \tag{22,16}$$

(коммутативность с α следует из того, что $\alpha = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ есть произведение двух матриц γ^μ).

Матрица γ^5 эрмитова; действительно,

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0,$$

и поскольку последовательность 3210 сводится к последовательности 0123 четным числом перестановок, то

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \tag{22,17}$$

Укажем также вид этой матрицы в двух конкретных представлениях:

$$\begin{aligned}&\text{спинорное} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\\ &\text{стандартное} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{22,18}$$

След матрицы γ^5 равен нулю:

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = 0 \tag{22,19}$$

(это видно и прямо из (22,18)). Равны нулю также и следы произведений $\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu$. Для произведений же γ^5 на четыре множителя γ^μ имеем

$${}^1/_4\,\mathrm{Sp}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{22,20}$$

Отметим еще формулу:

$$\gamma N = i\gamma^5 (\gamma a)(\gamma b)(\gamma c), \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\mu b_\nu c_\rho, \tag{22,21}$$

справедливую для взаимно перпендикулярных 4-векторов a, b, c: $ab = ac = bc = 0$.

В некоторых случаях (в задачах, в которых фигурируют нерелятивистские частицы) может возникнуть необходимость в вычислении следов произведений, в которые входят раздельно γ^0 и трехмерный «вектор» $\boldsymbol{\gamma}$. Отличны от нуля лишь следы произведений с четным числом множителей γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$. При этом все множители γ^0 сводятся к 1, а следы произведений с двумя и четырьмя множителями $\boldsymbol{\gamma}$ даются формулами

$$\begin{gathered} {}^1/_4\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}) = -\,\mathbf{ab}, \\ {}^1/_4\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{c}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) - (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) + (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}). \end{gathered} \tag{22,22}$$

§ 23. Плоские волны

Состояние свободной частицы с определенными значениями импульса и энергии описывается плоской волной, которую представим в виде

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}. \tag{23,1}$$

Индекс p указывает значение 4-импульса; амплитуда волны u_p — определенным образом нормированный биспинор.

При дальнейшем проведении вторичного квантования нам понадобятся, наряду с волновыми функциями (23,1), также и функции с «отрицательной частотой», возникающие в релятивистской теории, как было объяснено в § 11, в связи с двузначностью корня $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Как и в § 11, мы будем везде понимать под ε положительную величину $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, так что «отрицательная частота» есть $-\varepsilon$; изменив также знак $\mathbf{p}$, мы получим функцию, которую естественно обозначить как ψ_{-p}:

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}. \tag{23,2}$$

Смысл этих функций выяснится в § 26. Ниже мы будем параллельно выписывать формулы для ψ_p и ψ_{-p}.

Компоненты биспинорных амплитуд u_p и u_{-p} удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m) u_p = 0, \quad (\gamma p + m) u_{-p} = 0, \tag{23,3}$$

получающимся подстановкой (23, 1—2) в уравнение Дирака