Отметим еще формулу:

$$\gamma N = i\gamma^5 (\gamma a)(\gamma b)(\gamma c), \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\mu b_\nu c_\rho, \tag{22,21}$$

справедливую для взаимно перпендикулярных 4-векторов a, b, c: $ab = ac = bc = 0$.

В некоторых случаях (в задачах, в которых фигурируют нерелятивистские частицы) может возникнуть необходимость в вычислении следов произведений, в которые входят раздельно γ^0 и трехмерный «вектор» $\boldsymbol{\gamma}$. Отличны от нуля лишь следы произведений с четным числом множителей γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$. При этом все множители γ^0 сводятся к 1, а следы произведений с двумя и четырьмя множителями $\boldsymbol{\gamma}$ даются формулами

$$\begin{gathered} {}^1/_4 \operatorname{Sp} (\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}) = -\mathbf{ab}, \\ {}^1/_4 \operatorname{Sp} (\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{c}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) - (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) + (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}). \end{gathered} \tag{22,22}$$

§ 23. Плоские волны

Состояние свободной частицы с определенными значениями импульса и энергии описывается плоской волной, которую представим в виде

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}. \tag{23,1}$$

Индекс p указывает значение 4-импульса; амплитуда волны u_p — определенным образом нормированный биспинор.

При дальнейшем проведении вторичного квантования нам понадобятся, наряду с волновыми функциями (23,1), также и функции с «отрицательной частотой», возникающие в релятивистской теории, как было объяснено в § 11, в связи с двузначностью корня $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Как и в § 11, мы будем везде понимать под ε положительную величину $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, так что «отрицательная частота» есть $-\varepsilon$; изменив также знак $\mathbf{p}$, мы получим функцию, которую естественно обозначить как ψ_{-p}:

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}. \tag{23,2}$$

Смысл этих функций выяснится в § 26. Ниже мы будем параллельно выписывать формулы для ψ_p и ψ_{-p}.

Компоненты биспинорных амплитуд u_p и u_{-p} удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m) u_p = 0, \quad (\gamma p + m) u_{-p} = 0, \tag{23,3}$$

получающимся подстановкой (23, 1—2) в уравнение Дирака (что сводится к замене в последнем оператора $\hat{p}$ на $\pm p$) [1]. Соотношение $p^2 = m^2$ является при этом условием совместности каждой из этих систем. Мы будем всегда нормировать биспинорные амплитуды инвариантными условиями

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad \bar{u}_{-p} u_{-p} = -2m \tag{23,4}$$

(черта над буквой обозначает, как везде, дираковское сопряжение: $\bar{u} = u^* \gamma^0$). Умножив уравнения (23,3) слева на $\bar{u}_{\pm p}$, получим $(\bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p}) p = 2m^2 = 2p^2$, откуда видно, что

$$\bar{u}_p \gamma u_p = \bar{u}_{-p} \gamma u_{-p} = 2p. \tag{23,5}$$

Отметим, что переход от формул для u_p к формулам для u_{-p} производится путем изменения знака m.

4-вектор плотности тока:

$$j = \bar{\psi}_{\pm p} \gamma \psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon} \bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{23,6}$$

т. е. $j^\mu = (1, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость частицы. Отсюда видно, что функции ψ_p нормированы «на одну частицу в объеме $V = 1$».

В силу уравнений (23,3) компоненты амплитуды волны связаны друг с другом некоторыми соотношениями, конкретный вид которых зависит, конечно, от выбора представления ψ. Найдем их для стандартного представления.

Из уравнений (21,19) имеем для плоской волны

$$(\varepsilon - m)\varphi - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\chi = 0, \quad (\varepsilon + m)\chi - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\varphi = 0. \tag{23,7}$$

Из этих равенств находим соотношение между φ и χ в двух эквивалентных видах:

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon - m}\chi, \quad \chi = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon + m}\varphi \tag{23,8}$$

(эквивалентность этих формул очевидна: умножая первую из них слева на $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/(\varepsilon + m)$ и учитывая, что $(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2$ и $\varepsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}^2$, получаем вторую). Общий же множитель в φ и χ выбираем таким образом, чтобы удовлетворить условию нормировки (23,4). В результате получим для u_p (и аналогично для u_{-p}) следующие выражения:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, w \\ \sqrt{\varepsilon - m}\, (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, w \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}\, (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, w' \\ \sqrt{\varepsilon + m}\, w' \end{pmatrix} \tag{23,9}$$

(вторая формула получается из первой изменением знака перед m и переобозначением $w \to (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) w'$). Здесь $\mathbf{n}$ — орт вектора $\mathbf{p}$, а

---

[1]) Отметим также аналогичные системы, получающиеся из уравнения Дирака (21,9) для комплексно-сопряженной функции:

$$\bar{u}_p (\gamma p - m) = 0, \qquad \bar{u}_{-p} (\gamma p + m) = 0. \tag{23,3a}$$

w — произвольная двухкомпонентная величина, удовлетворяющая лишь условию нормировки

$$w^* w = 1. \tag{23,10}$$

Для $\bar{u} = u^* \gamma^0$ (γ^0 из (21,20)) имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= \left(\sqrt{\varepsilon + m}\, w^*,\ -\sqrt{\varepsilon - m}\, w^* (\mathbf{n}\sigma)\right), \\ \bar{u}_{-p} &= \left(\sqrt{\varepsilon - m}\, w'^* (\mathbf{n}\sigma),\ -\sqrt{\varepsilon + m}\, w'^*\right) \end{aligned} \tag{23,11}$$

и перемножением убеждаемся, что действительно $\bar{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$.

В системе покоя, т. е. при $\varepsilon = m$, имеем

$$u_p = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{23,12}$$

т. е. w представляет собой тот 3-спинор, к которому сводятся в нерелятивистском пределе амплитуды каждой из волн. Отметим, что в биспиноре u_{-p} обращаются в нуль в системе покоя первые, а не вторые две компоненты. Это свойство решений уравнения Дирака с «отрицательными частотами» очевидно: положив в (23,7) $\mathbf{p} = 0$ и заменив ε на $-m$, получим $\varphi = 0$[1]).

Амплитуда плоской волны содержит одну произвольную двухкомпонентную величину. Другими словами, при заданном импульсе существует два различных независимых состояния в соответствии с двумя возможными значениями проекции спина. При этом, однако, проекция спина на произвольную ось z не может иметь определенного значения. Это видно из того, что гамильтониан частицы с определенным $\mathbf{p}$ (т. е. матрица $H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m$) не коммутативен с матрицей $\Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$. В соответствии со сделанными в § 16 общими утверждениями сохраняется, однако, спиральность λ — проекция спина на направление $\mathbf{p}$: гамильтониан коммутативен с матрицей $\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}$.

Спиральным состояниям отвечают плоские волны, в которых трехмерный спинор $w = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ — собственная функция оператора $\mathbf{n}\sigma$:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{n}\sigma)\, w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \tag{23,13}$$

Явный вид этих спиноров:

$$w^{(\lambda = 1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad w^{(\lambda = -1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{23,14}$$

---

[1]) В спинорном же представлении имеем $\xi = -\eta$ вместо соотношения $\xi = \eta$, справедливого в системе покоя для решений с «положительными частотами».

где θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ относительно фиксированных осей xyz [1]).

Другой возможный выбор двух независимых состояний свободной частицы с заданным $\mathbf{p}$ (более простой, хотя и менее наглядный) отвечает двум значениям z-проекции спина в системе покоя; обозначим ее σ. Соответствующие спиноры:

$$w^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad w^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{23,15}$$

В качестве же двух линейно независимых решений с «отрицательной частотой» мы выберем плоские волны, в которых трехмерные спиноры

$$w^{(\sigma)\prime}=-\sigma_y w^{(-\sigma)}=2\sigma i w^{(\sigma)} \tag{23,16}$$

(смысл такого выбора выяснится в § 26).

Можно найти такое представление плоской волны, в котором в любой системе отсчета (а не только в системе покоя) она имеет всего две компоненты, отвечающие определенным значениям той же физической характеристики — проекции спина в системе покоя (*L. Foldy, S. A. Wouthuysen*, 1950).

Отправляясь от амплитуды u_p в стандартном представлении (23,9), ищем унитарное преобразование к такому представлению в виде

$$u'_p=Uu_p,\quad U=e^{W\gamma\mathbf{n}},$$

где W — вещественная величина; поскольку $\gamma^+=-\gamma$, при этом автоматически $U^+=U^{-1}$. Разлагая в ряд и учитывая, что $(\gamma\mathbf{n})^2=-1$, представим U в виде

$$U=\cos W+\gamma\mathbf{n}\sin W$$

(ср. переход от (18,13) к (18,14)). Из условия, чтобы в преобразованной амплитуде u'_p вторые две компоненты обратились в нуль, найдем

$$\operatorname{tg} W=\frac{|\mathbf{p}|}{m+\varepsilon},$$

так что

$$U=\frac{m+\varepsilon+(\gamma\mathbf{n})\,|\mathbf{p}|}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)}}.$$

В новом представлении

$$u'_p=\sqrt{2\varepsilon}\begin{pmatrix}w\\0\end{pmatrix}. \tag{23,17}$$

[1]) Решение уравнений (23,13) допускает умножение на произвольный фазовый множитель, что связано с возможностью произвольного поворота вокруг направления $\mathbf{n}$.

Гамильтониан частицы в этом представлении принимает вид

$$\hat{H}' = U(\alpha\mathbf{p} + \beta m)U^{-1} = \beta\varepsilon \tag{23,18}$$

(все матрицы β, α, γ стандартного представления). Этот гамильтониан коммутативен с матрицей

$$\Sigma = -\alpha\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

которая в новом представлении является оператором сохраняющейся величины — спина в системе покоя.

§ 24. Сферические волны

Волновые функции состояний свободной частицы (со спином $^1/_2$) с определенными значениями j момента представляют собой спинорные сферические волны. Определим их вид, для чего напомним предварительно аналогичные формулы нерелятивистской теории.

Нерелятивистская волновая функция есть 3-спинор $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$. Для состояния с определенными значениями энергии ε (а с нею и величины импульса p[1])), орбитального момента l, полного момента j и его проекции m волновая функция имеет вид

$$\psi = R_{pl}(r)\,\Omega_{jlm}(\theta, \varphi). \tag{24,1}$$

Ее угловая часть Ω_{jlm} — трехмерные спиноры, компоненты которых (для двух значений $j = l \pm {}^1/_2$, возможных при данном l) даются формулами

$$\Omega_{l+1/2,\,l,\,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m}{2j}}\,Y_{l,\,m-1/2} \\ \sqrt{\dfrac{j-m}{2j}}\,Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix},$$
$$\Omega_{l-1/2,\,l,\,m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{j-m+1}{2j+2}}\,Y_{l,\,m-1/2} \\ \sqrt{\dfrac{j+m+1}{2j+2}}\,Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix} \tag{24,2}$$

(см. III, § 106, задача). Будем называть Ω_{jlm} *шаровыми спинорами.* Они нормированы условием

$$\int \Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}\,do = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{24,3}$$

Радиальные же функции R_{pl} представляют собой общий множитель в обеих компонентах спинора ψ и даются формулой

[1]) В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.