ждения и уничтожения различных фермионов антикоммутирующими, так же как и операторы, относящиеся к различным состояниям одних и тех же фермионов.

Задача

Найти лагранжиан спинорного поля.

Решение. Функция Лагранжа, отвечающая уравнению Дирака, дается вещественным скалярным выражением

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\cdot\gamma^{\mu}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi. \tag{1}$$

Понимая под «обобщенными координатами» q компоненты ψ и $\bar{\psi}$, легко убедиться в том, что соответствующие уравнения Лагранжа (10,10) совпадают с уравнениями Дирака для $\bar{\psi}$ и ψ. Общий знак лагранжиана (как и общий коэффициент в нем) в данном случае условен. Поскольку L содержит производные от ψ и $\bar{\psi}$ линейно, действие $S = \int L\, d^4x$ все равно не может иметь ни минимума, ни максимума. Условие $\delta S = 0$ определяет в этом случае лишь стационарную точку, но не экстремум интеграла.

Лагранжиан спинорного поля получается заменой в (1) ψ оператором $\hat{\psi}$. Применив к этому лагранжиану формулу (12,12), получим оператор тока (25,7).

§ 26. Зарядовое сопряжение и обращение спиноров по времени

Множители $\psi_{p\sigma} = u_{p\sigma}e^{-ipx}$, стоящие в (25,1) при операторах $\hat{a}_{p\sigma}$, представляют собой волновые функции свободных частиц (будем говорить «электронов») с импульсами $\mathbf{p}$ и поляризациями σ:

$$\psi^{(э)}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Множители же $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ при операторах $\hat{b}_{p\sigma}$ надо рассматривать как волновые функции позитронов с теми же $\mathbf{p}$, σ. При этом, однако, окажется, что электронные и позитронные функции выражены в различных биспинорных представлениях. Это ясно из того, что ψ и $\bar{\psi}$ различны по своим трансформационным свойствам и их компоненты удовлетворяют различным системам уравнений. Для устранения этого недостатка надо произвести определенное унитарное преобразование компонент $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ — такое, чтобы новая четырехкомпонентная функция удовлетворяла тому же уравнению, что и $\psi_{p\sigma}$[1]). Именно такую функцию мы и

[1]) Для частиц со спином 0 этот вопрос вообще не возникал, так как скалярные функции ψ и ψ^* удовлетворяют одному и тому же уравнению, и ψ^*_{-p} просто совпадает с ψ_p.

будем называть волновой функцией позитрона (с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ). Обозначив матрицу требуемого унитарного преобразования U_C, напишем

$$\psi^{(\text{п})}_{p\sigma} = U_C \bar{\psi}_{-p-\sigma}. \tag{26,1}$$

Операция C, с помощью которой эта функция образуется из $\psi_{-p-\sigma}$, называется *зарядовым сопряжением* волновой функции (*H. A. Kramers*, 1937). Это понятие не ограничено, конечно, его применением к плоским волнам. Для всякой вообще функции ψ существует «зарядово-сопряженная» функция

$$\hat{C}\psi(t, \mathbf{r}) = U_C \bar{\psi}(t, \mathbf{r}), \tag{26,2}$$

преобразующаяся, как ψ, и удовлетворяющая тому же уравнению.

Свойства матрицы U_C следуют из этого определения. Если ψ — решение уравнения Дирака $(\gamma\hat{p} - m)\psi = 0$, то $\bar{\psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{\psi}(\gamma\hat{p} + m) = 0, \quad \text{или} \quad (\tilde{\gamma}\hat{p} + m)\bar{\psi} = 0.$$

Умножив это уравнение слева на U_C:

$$U_C\tilde{\gamma}\hat{p}\bar{\psi} + mU_C\bar{\psi} = 0,$$

потребуем, чтобы функция $U_C\bar{\psi}$ удовлетворяла тому же уравнению, что и ψ:

$$(\gamma\hat{p} - m)U_C\bar{\psi} = 0.$$

Сравнив оба уравнения, найдем следующее «соотношение коммутации» между U_C и матрицами γ^μ [1]):

$$U_C\tilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \tag{26,3}$$

Будем предполагать далее, что волновые функции заданы в спинорном или стандартном представлении (к общему случаю произвольного представления мы вернемся лишь в конце этого параграфа). В этих представлениях

$$\begin{gathered} \gamma^{0,2} = \tilde{\gamma}^{0,2}, \quad \gamma^{1,3} = -\tilde{\gamma}^{1,3}, \\ (\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3}, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2. \end{gathered} \tag{26,4}$$

Тогда условиям (26,3) удовлетворяет матрица $U_C = \eta_C\gamma^2\gamma^0$ с произвольной постоянной η_C. Из требования $\hat{C}^2 = 1$ следует, что $|\eta_C|^2 = 1$, так что матрица U_C определена с точностью до фазового множителя. В дальнейшем мы выберем $\eta_C = 1$, так что

$$U_C = \gamma^2\gamma^0 = -\alpha_y. \tag{26,5}$$

---

[1]) Отметим также следующее отсюда равенство

$$U_C\tilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C. \tag{26,3a}$$

Заметив также, что $\bar\psi = \psi^*\gamma^0 = \tilde\gamma^0\psi^* = \gamma^0\psi^*$, можно записать действие оператора $\hat C$ в следующем виде:

$$\hat C\psi = \gamma^2\gamma^0\bar{\psi} = \gamma^2\psi^*. \tag{26,6}$$

В явном виде преобразование (26,6) для спинорного представления

$$C\colon\ \xi^\alpha \to -i\eta^{\dot\alpha *},\quad \eta_{\dot\alpha} \to -i\xi^*_\alpha, \tag{26,7а}$$

или, что то же,

$$C\colon\ \xi_\alpha \to -i\eta^*_{\dot\alpha},\quad \eta^{\dot\alpha} \to -i\xi^{\alpha *}. \tag{26,7б}$$

Преобразование зарядового сопряжения для плоских волн $\psi_{\pm p\sigma}$ легко произвести, воспользовавшись их явными выражениями (23,9) и матрицей U_C в стандартном представлении:

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{26,8}$$

Заметив, что

$$\sigma_y\sigma^* = -\sigma\sigma_y,$$

при определении $w^{(\sigma)\prime}$ согласно (23,16) получим

$$U_C\tilde u_{-p-\sigma} = u_{p\sigma},\quad U_C u_{-p-\sigma} = \tilde u_{p\sigma}. \tag{26,9}$$

Таким образом,

$$\hat C\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}, \tag{26,10}$$

так что функции $\psi_{-p-\sigma}$, фигурирующие в ψ-операторах (25,1) вместе с операторами $\hat b_{\mathbf{p}\sigma}$, действительно отвечают состояниям частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ. Мы видим также, что электронные и позитронные состояния описываются одними и теми же функциями:

$$\psi^{(э)}_{p\sigma} = \psi^{(п)}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Это вполне естественно, так как функции $\psi_{p\sigma}$ несут в себе сведения лишь об импульсе и поляризации частицы.

Аналогичным образом можно рассмотреть операцию обращения времени. Изменение знака времени должно сопровождаться комплексным сопряжением волновой функции. Для того чтобы получить в результате «обращенную по времени» волновую функцию ($\hat T\psi$) в том же представлении, что и исходная ψ, надо еще произвести над компонентами ψ^* (или $\bar\psi$) некоторое унитарное преобразование. Таким образом, аналогично (26,2) представим действие оператора $\hat T$ на ψ в виде

$$\hat T\psi(t, \mathbf{r}) = U_T\bar\psi(-t, \mathbf{r}), \tag{26,11}$$

где U_T — унитарная матрица.

Снова пишем уравнение Дирака, которому удовлетворяет ψ:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m\right)\psi(t, \mathbf{r}) = 0,$$

и уравнение для $\bar{\psi}$:

$$\left(i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla + m\right)\bar{\psi}(t, \mathbf{r}) = 0.$$

Заменим в последнем уравнении $t \to -t$ и умножим его слева на $-U_T$:

$$\left(iU_T\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} - iU_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla\right)\bar{\psi}(-t, \mathbf{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \mathbf{r}) = 0.$$

Мы хотим, чтобы функция $U_T\bar{\psi}(-t, \mathbf{r})$ удовлетворяла тому же уравнению, что и $\psi(t, \mathbf{r})$:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)U_T\bar{\psi}(-t, \mathbf{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \mathbf{r}) = 0.$$

Сравнив оба уравнения, найдем, что матрица U_T должна удовлетворять условиям

$$U_T\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \quad U_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma}U_T. \tag{26,12}$$

В спинорном и стандартном представлениях этим условиям удовлетворяет матрица [1])

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0. \tag{26,13}$$

Таким образом, действие оператора $\hat{T}$ дается формулой

$$\hat{T}\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar{\psi}(-t, \mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t, \mathbf{r}). \tag{26,14}$$

В явном виде это преобразование для спинорного представления

$$T\colon\ \xi^\alpha \to -i\xi^*_\alpha, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\eta^{\dot\alpha *} \tag{26,15а}$$

или

$$T\colon\ \xi_\alpha \to i\xi^{\alpha *}, \quad \eta^{\dot\alpha} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}. \tag{26,15б}$$

В стандартном представлении

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \tag{26,16}$$

Найдем результат воздействия на ψ всех трех операций P, T и C. Для этого пишем последовательно:

$$\hat{T}\psi(t, \mathbf{r}) = -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \mathbf{r}),$$

$$\hat{P}\hat{T}\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^0(\hat{T}\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, -\mathbf{r}),$$

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T}\psi(t, \mathbf{r}) = \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t, -\mathbf{r}),$$

[1]) Выбор фазового множителя в (26,13) связан с выбором в (26,5) соображениями, указанными ниже, в примеч. на с. 125.

или

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T}\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^5\psi(-t, -\mathbf{r}). \tag{26,17}$$

В спинорном представлении

$$CPT\colon\ \xi^\alpha \to -i\xi^\alpha, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\eta_{\dot\alpha}, \tag{26,18}$$

в чем легко убедиться и прямо из правил преобразований (20,4), (26,7), (26,15)[1]).

Написанные выше выражения для матриц U_C и U_T предполагали спинорное или стандартное представление ψ. Выясним, наконец, какие из свойств этих выражений сохраняются для произвольного представления ψ.

Если ψ подвергается унитарному преобразованию:

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \bar\psi' = \psi'^{*}\gamma^{0'} = \bar\psi U^{+} = \bar\psi\tilde{U}^{-1}, \tag{26,19}$$

то в новом представлении

$$(\hat{C}\psi)' = U(C\psi) = UU_C\bar\psi = UU_C(\bar\psi' U) = UU_C\tilde{U}\bar\psi'.$$

Сравнивая с определением матрицы U'_C в новом представлении $((\hat{C}\psi)' = U'_C\bar\psi')$, находим

$$U'_C = UU_C\tilde{U}. \tag{26,20}$$

Преобразование (26,20) совпадает с преобразованием матриц γ лишь для вещественных U. Поэтому и выражение (26,5) справедливо лишь в представлениях, получающихся из спинорного или стандартного вещественным преобразованием.

Матрица (26,5) унитарна, а транспонирование меняет ее знак:

$$U_C U_C^{+} = 1, \quad \tilde{U}_C = -U_C. \tag{26,21}$$

Эти свойства инвариантны относительно преобразования (26,20), а следовательно, имеют место в любом представлении. Матрица (26,5) также и эрмитова ($U_C = U_C^{+}$), но это свойство в общем случае нарушается преобразованием (26,20).

Все сказанное (в том числе (26,21)) относится и к свойствам матрицы U_T.

В аппарате вторичного квантования преобразования C, P, T для ψ-операторов должны быть сформулированы как правила преобразований операторов рождения и уничтожения частиц. Эти правила можно установить (подобно тому, как это было сделано

[1]) Запись $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ предполагает действие операторов в порядке справа налево. Общий знак в (26,17—18) зависит от этого порядка ввиду некоммутативности $\hat{T}$ с $\hat{C}$ и $\hat{P}$ (в их действии на биспинор).

в § 13 для частиц со спином 0), исходя из требования, чтобы преобразованные ψ-операторы могли быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^C(t, \mathbf{r}) &= U_C \hat{\bar{\psi}}(t, \mathbf{r}), \\ \hat{\psi}^P(t, \mathbf{r}) &= i\gamma^0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{r}), \\ \hat{\psi}^T(t, \mathbf{r}) &= U_T \hat{\bar{\psi}}(-t, \mathbf{r}). \end{aligned} \tag{26,22}$$

Задача

Найти оператор зарядового сопряжения в представлении Майораны (см. задачу 2, § 21).

Решение. Матрица U'_C в представлении Майораны получается из матрицы $U_C = -\alpha_y$ в стандартном представлении преобразованием (26,20) с $U = (\alpha_y + \beta)/\sqrt{2}$ и равна $U'_C = \alpha_y$ (α_y и β обозначают матрицы стандартного представления). Обозначая штрихом величины в представлении Майораны, имеем $\hat{C}\psi' = U'_C(\psi'^*\beta')$, и поскольку $\beta' = \alpha_y$, то

$$\hat{C}\psi' = \alpha_y(\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y\tilde{\alpha}_y\psi'^* = \psi'^*,$$

т. е. зарядовое сопряжение эквивалентно комплексному сопряжению.

§ 27. Внутренняя симметрия частиц и античастиц

Волновая функция частицы со спином $^1/_2$ в ее системе покоя сводится к одному 3-спинору (обозначим его Φ^α). С поведением этого спинора при инверсии связано понятие о внутренней четности частицы. Однако (как было уже указано в § 19), хотя два возможных закона преобразования 3-спиноров ($\Phi^\alpha \to \pm i\Phi^\alpha$) и не эквивалентны друг другу, но приписывание спинору определенной четности не имеет абсолютного смысла. Не имеет поэтому смысла говорить и о внутренней четности самой по себе частицы со спином $^1/_2$. Можно, однако, говорить об относительной внутренней четности двух таких частиц.

Из двух (трехмерных) спиноров $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ можно составить скаляр $\Phi^{(1)}_\alpha\Phi^{(2)\alpha}$. Если это — истинный скаляр, то говорят, что описываемые данными спинорами частицы имеют одинаковую четность; если же это — псевдоскаляр, то говорят о противоположной внутренней четности частиц.

Покажем, что внутренние четности частицы и античастицы (со спином $^1/_2$) противоположны (*В. Б. Берестецкий*, 1948).

Для этого заметим, что если к обеим сторонам P-преобразования (19,5) (в спинорном представлении)

$$P\colon\ \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{27,1}$$