в § 13 для частиц со спином 0), исходя из требования, чтобы преобразованные ψ-операторы могли быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^C(t, \mathbf{r}) &= U_C \hat{\bar{\psi}}(t, \mathbf{r}), \\ \hat{\psi}^P(t, \mathbf{r}) &= i\gamma^0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{r}), \\ \hat{\psi}^T(t, \mathbf{r}) &= U_T \hat{\bar{\psi}}(-t, \mathbf{r}). \end{aligned} \tag{26,22}$$

Задача

Найти оператор зарядового сопряжения в представлении Майораны (см. задачу 2, § 21).

Решение. Матрица U'_C в представлении Майораны получается из матрицы $U_C = -\alpha_y$ в стандартном представлении преобразованием (26,20) с $U = (\alpha_y + \beta)/\sqrt{2}$ и равна $U'_C = \alpha_y$ (α_y и β обозначают матрицы стандартного представления). Обозначая штрихом величины в представлении Майораны, имеем $\hat{C}\psi' = U'_C(\psi'^*\beta')$, и поскольку $\beta' = \alpha_y$, то

$$\hat{C}\psi' = \alpha_y(\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y \tilde{\alpha}_y \psi'^* = \psi'^*,$$

т. е. зарядовое сопряжение эквивалентно комплексному сопряжению.

§ 27. Внутренняя симметрия частиц и античастиц

Волновая функция частицы со спином $^1/_2$ в ее системе покоя сводится к одному 3-спинору (обозначим его Φ^α). С поведением этого спинора при инверсии связано понятие о внутренней четности частицы. Однако (как было уже указано в § 19), хотя два возможных закона преобразования 3-спиноров ($\Phi^\alpha \to \pm i\Phi^\alpha$) и не эквивалентны друг другу, но приписывание спинору определенной четности не имеет абсолютного смысла. Не имеет поэтому смысла говорить и о внутренней четности самой по себе частицы со спином $^1/_2$. Можно, однако, говорить об относительной внутренней четности двух таких частиц.

Из двух (трехмерных) спиноров $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ можно составить скаляр $\Phi^{(1)}_\alpha \Phi^{(2)\alpha}$. Если это — истинный скаляр, то говорят, что описываемые данными спинорами частицы имеют одинаковую четность; если же это — псевдоскаляр, то говорят о противоположной внутренней четности частиц.

Покажем, что внутренние четности частицы и античастицы (со спином $^1/_2$) противоположны (*В. Б. Берестецкий*, 1948).

Для этого заметим, что если к обеим сторонам P-преобразования (19,5) (в спинорном представлении)

$$P:\ \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{27,1}$$

применить операцию C (26,7), то получим

$$\eta^{c\dot{\alpha}*} \to i\xi^{c*}_{\alpha}, \quad \xi^{c*}_{\alpha} \to i\eta^{c\dot{\alpha}*},$$

где индексом c отмечены компоненты биспинора $\psi^c = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \eta^c \end{pmatrix}$, зарядово-сопряженного биспинору $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$. Произведя комплексное сопряжение и переместив индексы, найдем

$$P\colon\ \eta^c_{\dot{\alpha}} \to i\xi^{c\alpha}, \quad \xi^{c\alpha} \to i\eta^c_{\dot{\alpha}}. \tag{27,2}$$

Мы видим, что зарядово-сопряженные биспиноры преобразуются при инверсии по одинаковому закону.

Пусть $\psi^{(э)}$ — волновая функция частицы (электрона), а $\psi^{(п)}$ — волновая функция античастицы (позитрона). Последняя есть биспинор, зарядово-сопряженный некоторому «отрицательно-частотному» решению уравнения Дирака. В системе покоя каждая из них сводится к некоторому 3-спинору:

$$\xi^{(э)\alpha} = \eta^{(э)}_{\dot{\alpha}} = \Phi^{(э)\alpha}, \quad \xi^{(п)\alpha} = \eta^{(п)}_{\dot{\alpha}} = \Phi^{(п)\alpha}.$$

Согласно (27,1—2) эти спиноры преобразуются при инверсии по закону

$$\Phi^{\alpha} \to i\Phi^{\alpha}, \tag{27,3}$$

одинаковому для $\Phi^{(э)}$ и $\Phi^{(п)}$. Произведение же $\Phi^{(э)}\Phi^{(п)}$ меняет знак, что и доказывает сделанное утверждение.

Истинно нейтральной называют частицу, совпадающую со своей античастицей (см. § 12). ψ-оператор поля таких частиц удовлетворяет условию

$$\hat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \hat{\psi}^C(t, \mathbf{r}).$$

Для частиц со спином $^1/_2$ это означает условия (в спинорном представлении) [1])

$$\hat{\xi}^{\alpha} = -i\hat{\eta}^{\dot{\alpha}+}, \quad \hat{\eta}_{\dot{\alpha}} = -i\hat{\xi}^{+}_{\alpha}. \tag{27,4}$$

Как и всякие соотношения, выражающие собой какие-либо физические свойства, эти условия инвариантны относительно преобразования CPT [2]). Легко проверить, что фактически они инвариантны не только по отношению к CPT, но и по отношению к каждому из трех преобразований в отдельности.

[1]) В представлении же Майораны истинная нейтральность означает просто эрмитовость оператора $\hat{\psi}'$ (см. задачу к § 26).

[2]) Точнее, преобразование CPT должно быть определено в данном случае так, чтобы оставлять инвариантными соотношения типа (27,4). Это достигнуто соответствующим выбором фазового множителя в определении матрицы U_T (см. примеч. на с. 122).

Мы условились в § 19 определять инверсию спиноров как преобразование, для которого $\hat{P}^2 = -1$, и до сих пор следовали этому определению. Легко видеть, что полученный выше результат об относительной четности частиц и античастиц не зависит, как и должно быть, от способа определения инверсии.

Если инверсия определена условием $\hat{P}^2 = 1$, то вместо (27,1) будет

$$P:\ \xi^{\alpha} \to \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to \xi^{\alpha}. \tag{27,5}$$

Зарядово-сопряженная же функция преобразуется при этом по закону

$$\xi^{c\alpha} \to -\eta^{c}_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{c}_{\dot{\alpha}} \to -\xi^{c\alpha},$$

отличающемуся от (27,5) знаком. Соответственно этому трехмерные спиноры Ф будут преобразовываться согласно

$$\Phi^{(э)\alpha} \to \Phi^{(э)\alpha}, \quad \Phi^{(п)\alpha} \to -\Phi^{(п)\alpha},$$

так что произведение $\Phi^{(э)}\Phi^{(п)}$ будет по-прежнему псевдоскаляром.

Единственное возможное различие в физических следствиях обеих концепций инверсии состоит в том, что при определении (27,5) условие истинной нейтральности поля не было бы инвариантным относительно этого преобразования (или преобразования CP): оно меняло бы относительный знак обеих сторон равенств (27,4). Фактически истинно нейтральные частицы со спином $^1/_2$ неизвестны, и в настоящее время нельзя сказать, имеет ли указанное различие в двух определениях инверсии реальный физический смысл[1]).

Задача

Найти зарядовую четность позитрония (водородоподобная система из электрона и позитрона).

Решение. Волновая функция двух фермионов должна быть антисимметрична относительно одновременной перестановки координат, спинов и зарядовых переменных частиц (ср. задачу к § 13). Перестановка первых умножает функцию на $(-1)^l$, вторых — на $(-1)^{1+S}$ (где $S = 0$ или 1 — полный спин системы), третьих — на искомое C. Из условия $(-1)^l(-1)^{1+S}C = -1$ находим

$$C = (-1)^{l+S}.$$

Поскольку внутренние четности электрона и позитрона противоположны, пространственная четность системы $P = (-1)^{l+1}$. Комбинированная четность: $CP = (-1)^{S+1}$.

---

[1]) Неполная эквивалентность двух определений инверсии была отмечена *Рака* (*G. Racah*, 1937).