§ 28. Билинейные формы

Рассмотрим трансформационные свойства различных билинейных форм, которые можно составить из компонент функций ψ и ψ^*. Такие формы вообще имеют большое значение в квантовой механике; к их числу относится и 4-вектор плотности тока (21,11).

Поскольку ψ и ψ^* имеют по четыре компоненты, из них можно составить $4 \cdot 4 = 16$ независимых билинейных комбинаций. Классификация этих величин по их трансформационным свойствам очевидна из перечисленных в § 19 способов перемножения двух произвольных биспиноров (которыми в данном случае являются ψ и ψ^*). Именно, можно составить скаляр (обозначим его S), псевдоскаляр (P), смешанный спинор второго ранга, эквивалентный истинному 4-вектору V^μ (четыре независимых величины), смешанный спинор второго ранга, эквивалентный 4-псевего S), псевдоскаляр (P), смешанный спинор второго ранга, эквивалентный антисимметричному 4-тензору $T^{\mu\nu}$ (шесть величин).

В симметричном виде (для любого представления ψ) эти комбинации записываются следующим образом:

$$S = \bar{\psi}\psi, \quad P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi,$$

$$V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \tag{28,1}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\boldsymbol{\alpha},\ i\boldsymbol{\Sigma}) \tag{28,2}$$

(перечисление компонент в (28,2) по (19,15))[1]. Все написанные выражения вещественны.

Скалярность и псевдоскалярность величин S и P очевидна из их спинорного представления:

$$S = \xi^*\eta + \eta^*\xi, \quad P = i(\xi^*\eta - \eta^*\xi),$$

что как раз соответствует выражениям (19,7) и (19,8). Векторный характер величин V^μ очевиден после этого из уравнения Дирака: умножив равенство $\hat{p}_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi$ слева на $\bar{\psi}$, получим

$$(\bar{\psi}\hat{p}_\mu\gamma^\mu\psi) = m\bar{\psi}\psi;$$

поскольку справа стоит скаляр, скаляром должно быть и выражение в левой части.

Правило составления величин (28,1) очевидно: они составляются так, как если бы матрицы γ^μ образовывали 4-вектор, γ^5

---

[1]) При унитарном преобразовании ψ (изменений представления) имеем:

$$\psi \to U\psi, \quad \gamma \to U\gamma U^{-1}, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}U^{-1},$$

и инвариантность билинейных форм при таких преобразованиях очевидна.

было псевдоскаляром, а стоящие с обеих сторон $\bar\psi$ и ψ образовывали вместе скаляр [1]). Отсутствие билинейных форм, которые имели бы характер симметричного 4-тензора, очевидное из спинорного представления, ясно и из этого правила: поскольку симметричная комбинация матриц $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$, то такая форма свелась бы к скаляру.

Вторично-квантованные билинейные формы получаются заменой в (28,1) ψ-функций ψ-операторами. Для большей общности будем считать, что два ψ-оператора относятся к полям различных частиц; будем различать их индексами a и b. Выясним, как преобразуются такие операторные формы при зарядовом сопряжении. Замечая, что [2])

$$\hat\psi^C=U_C\hat{\bar\psi},\qquad \hat{\bar\psi}^C=U_C^+\hat\psi, \tag{28,3}$$

имеем, используя (26,3) и (26,21):

$$\hat{\bar\psi}^C_a\hat\psi^C_b=\hat\psi_aU_C^*U_C\hat{\bar\psi}_b=-\hat\psi_aU_C^+U_C\hat{\bar\psi}_b=-\hat\psi_a\hat{\bar\psi}_b,$$

$$\hat{\bar\psi}^C_a\gamma^\mu\hat\psi^C_b=\hat\psi_aU_C^*\gamma^\mu U_C\hat{\bar\psi}_b=-\hat\psi_aU_C^+\gamma^\mu U_C\hat{\bar\psi}_b=\hat\psi_a\tilde\gamma^\mu\hat{\bar\psi}_b.$$

При перестановке операторов к исходному порядку ($\hat{\bar\psi}$ слева от $\hat\psi$) в силу правил коммутации Ферми (25,4) изменится знак произведения (и, кроме того, появятся члены, не зависящие от состояния поля, которые опускаем, как и при аналогичных выводах в § 13). Таким образом, получим

$$\hat{\bar\psi}^C_a\hat\psi^C_b=\hat{\bar\psi}_b\hat\psi_a,\qquad \hat{\bar\psi}^C_a\gamma^\mu\hat\psi^C_b=-\hat{\bar\psi}_b\gamma^\mu\hat\psi_a.$$

Преобразовав аналогичным образом также и остальные формы, найдем, что при зарядовом сопряжении [3])

$$C:\quad \begin{array}{l}\hat S_{ab}\to\hat S_{ba},\quad \hat P_{ab}\to\hat P_{ba},\quad \hat V^\mu_{ab}\to-\hat V^\mu_{ba},\\ \hat A^\mu_{ab}\to\hat A^\mu_{ba},\quad \hat T^{\mu\nu}_{ab}\to-\hat T^{\mu\nu}_{ba}.\end{array} \tag{28,4}$$

---

[1]) «Псевдоскалярность» γ^5 сама соответствует этим правилам, поскольку

$$\gamma^5=\frac{i}{24}e_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho.$$

[2]) Для получения второго равенства из первого пишем

$$\hat{\bar\psi}^C=\left[U_C^*(\hat\psi\gamma^{0*})\right]\gamma^0=\tilde\gamma^0U_C^*\gamma^0\hat\psi=-\tilde\gamma^0U_C^+\gamma^0\hat\psi=\tilde\gamma^0\gamma^{0*}U_C^+\hat\psi=U_C^+\hat\psi$$

(использованы (26,3), (26,21) и эрмитовость γ^0).

[3]) Обратим внимание на то, что для билинейных форм, составленных из ψ-функций (а не ψ-операторов), преобразования (28,4) имели бы обратный знак, поскольку возвращение к исходному порядку множителей $\bar\psi$ и ψ не сопровождалось бы изменением знака.

Аналогичным образом выясняется поведение тех же форм при обращении времени. При этом надо помнить (см. § 13), что эта операция связана с изменением порядка расположения операторов, и поэтому, например,

$$(\hat{\bar{\psi}}_a\hat{\psi}_b)^T = \hat{\psi}_b^T\hat{\bar{\psi}}_a^T.$$

Подставив сюда

$$\hat{\psi}^T = U_T\hat{\bar{\psi}}, \quad \hat{\bar{\psi}}^T = -U_T^+\hat{\psi}, \tag{28,5}$$

получим

$$(\hat{\bar{\psi}}_a\hat{\psi}_b)^T = -\hat{\bar{\psi}}_b\tilde{U}_TU_T^+\hat{\psi}_a = \hat{\bar{\psi}}_bU_TU_T^+\hat{\psi}_a = \hat{\bar{\psi}}_b\hat{\psi}_a.$$

Рассмотрев таким же образом остальные формы, найдем

$$T: \quad \begin{array}{l} \hat{S}_{ab} \to \hat{S}_{ba}, \quad \hat{P}_{ab} \to -\hat{P}_{ba}, \quad (\hat{V}^0, \hat{\mathbf{V}})_{ab} \to (\hat{V}^0, -\hat{\mathbf{V}})_{ba}, \\ (\hat{A}^0, \hat{\mathbf{A}})_{ab} \to (\hat{A}^0, -\hat{\mathbf{A}})_{ba}, \quad \hat{T}^{\mu\nu}_{ab} = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{a}})_{ab} \to (\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{a}})_{ba} \end{array} \tag{28,6}$$

($\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{a}}$ — трехмерные векторы, эквивалентные компонентам $\hat{T}^{\mu\nu}$ согласно (19,15)).

При пространственной же инверсии, в соответствии с тензорным характером величин [1]),

$$P: \quad \begin{array}{l} \hat{S}_{ab} \to \hat{S}_{ab}, \quad \hat{P}_{ab} \to -\hat{P}_{ab}, \quad (\hat{V}^0, \hat{\mathbf{V}})_{ab} \to (\hat{V}^0, -\hat{\mathbf{V}})_{ab}, \\ (\hat{A}^0, \hat{\mathbf{A}})_{ab} \to (-\hat{A}^0, \hat{\mathbf{A}})_{ab}, \quad \hat{T}^{\mu\nu}_{ab} = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{a}})_{ab} \to (-\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{a}})_{ab}. \end{array} \tag{28,7}$$

Наконец, совместное применение всех трех операций оставляет все $\hat{S}_{ab}$, $\hat{P}_{ab}$, $\hat{T}^{\mu\nu}_{ab}$ неизменными и меняет знак всех $\hat{V}^\mu_{ab}$, $\hat{A}^\mu_{ab}$, что как раз соответствует смыслу этого преобразования как 4-инверсии: поскольку 4-инверсия эквивалентна повороту 4-системы координат, то по отношению к ней нет разницы между истинными и псевдотензорами любого ранга.

Рассмотрим попарные произведения билинейных форм, составленных из четырех различных функций ψ^a, ψ^b, ψ^c, ψ^d. Мы получим различные результаты в зависимости от того, какие пары этих функций перемножаются между собой. Оказывается, однако, возможным свести всякое такое произведение к произве-

---

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что преобразования T и P требуют также изменения аргументов функции; правые стороны (преобразованные формы в (28,6—7)) — функции соответственно от

$$x^T = (-t, \mathbf{r}), \qquad x^P = (t, -\mathbf{r}),$$

если левые стороны — функции от $x = (t, \mathbf{r})$.

дениям билинейных форм с фиксированными парами множителей (*W. Pauli, M. Fierz*, 1936). Выведем соотношение, лежащее в основе такого приведения.

Рассмотрим совокупность четырехрядных матриц

$$1,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu,\ i\gamma^\mu\gamma^5,\ i\sigma^{\mu\nu} \qquad (28,8)$$

(1 — единичная матрица). Перенумеровав эти 16 ($=1+1+4+4+6$) матриц в какой-либо определенной последовательности, обозначим их посредством γ^A ($A=1, \ldots, 16$), а те же матрицы с опущенными 4-тензорными индексами (μ, ν) посредством γ_A. Они обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{Sp}\gamma^A=0 \quad (\gamma^A\neq 1), \quad \gamma^A\gamma_A=1, \quad \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\gamma^A\gamma_B=\delta^A_B. \qquad (28,9)$$

В силу последнего из этих свойств матрицы γ^A линейно независимы. Поскольку же их число равно числу (4·4) элементов четырехрядной матрицы, матрицы γ^A составляют полную систему, по которой может быть разложена произвольная четырехрядная матрица Г:

$$\Gamma=\sum_A c_A\gamma^A, \quad c_A=\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\gamma_A\Gamma, \qquad (28,10)$$

или в раскрытом виде с матричными индексами ($i, k=1, 2, 3, 4$):

$$\Gamma_{ik}=\frac{1}{4}\sum_A \Gamma_{lm}\gamma^A_{ml}\gamma_{Aik}.$$

Предположив, в частности, что матрица Г содержит всего один отличный от нуля элемент (Γ_{lm}), получим искомое соотношение («условие полноты»)

$$\delta_{il}\delta_{km}=\frac{1}{4}\sum_A \gamma_{Aik}\gamma^A_{ml}. \qquad (28,11)$$

Умножая это равенство с обеих сторон на $\bar\psi^a_i\psi^b_k\bar\psi^c_m\psi^d_l$, имеем

$$(\bar\psi^a\psi^d)(\bar\psi^c\psi^b)=\frac{1}{4}\sum_A(\bar\psi^a\gamma_A\psi^b)(\bar\psi^c\gamma^A\psi^d). \qquad (28,12)$$

Это — одно из равенств указанного выше типа: оно сводит произведение двух скалярных билинейных форм к произведениям форм, составленных из других пар множителей[1]).

---

[1]) Напомним во избежание недоразумений, что здесь имеются в виду формы, составленные из ψ-функций. Для форм, составленных из антикоммутирующих ψ-операторов, знак преобразования был бы обратным.

Другие равенства этого типа можно получить из (28,12), заменяя

$$\psi^d \to \gamma^B \psi^d, \quad \psi^b \to \gamma^C \psi^b$$

и пользуясь разложением

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R c_R \gamma^R, \quad c_R = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \gamma^A \gamma^B \gamma_R$$

(см. задачу).

Укажем здесь для дальнейших ссылок также и аналогичное (28,11) соотношение для двухрядных матриц. Полную систему линейно независимых двухрядных матриц σ^A ($A = 1, \ldots, 4$) составляют

$$1, \ \sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z. \tag{28,13}$$

Для них

$$\operatorname{Sp} \sigma^A = 0 \quad (\sigma^A \neq 1), \quad \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \sigma^A \sigma^B = \delta_{AB}. \tag{28,14}$$

Условие полноты:

$$\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \sum_A \sigma^A_{\alpha\beta} \sigma^A_{\delta\gamma} = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\delta\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} \tag{28,15}$$

($\alpha, \beta, \ldots = 1, 2$) или иначе:

$$\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\delta\gamma} = -\frac{1}{2} \sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\delta\beta} + \frac{3}{2} \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta}. \tag{28,16}$$

Задача

Вывести формулы, аналогичные (28,12), для скалярных произведений двух билинейных форм P, V, A, T.

Решение. Обозначим:

$$J_S = (\bar\psi^a \psi^b)(\bar\psi^c \psi^d), \qquad J_P = (\bar\psi^a \gamma^5 \psi^b)(\bar\psi^c \gamma^5 \psi^d),$$

$$J_V = (\bar\psi^a \gamma^\mu \psi^b)(\bar\psi^c \gamma_\mu \psi^d), \qquad J_A = (\bar\psi^a i\gamma^\mu \gamma^5 \psi^b)(\bar\psi^c i\gamma_\mu \gamma^5 \psi^d),$$

$$J_T = (\bar\psi^a i\sigma^{\mu\nu} \psi^b)(\bar\psi^c i\sigma_{\mu\nu} \psi^d),$$

а теми же буквами со штрихом — такие же произведения с переставленными ψ^b и ψ^a. Указанным в тексте способом получим:

$$\begin{aligned}
4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_P,\\
4J'_V &= 4J_S - 2J_V + 2J_A - 4J_P,\\
4J'_T &= 6J_S - 2J_T + 6J_P,\\
4J'_A &= 4J_S + 2J_V - 2J_A - 4J_P,\\
4J'_P &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_P
\end{aligned}$$

(первая строка — по формуле (28,12)).