§ 29. Поляризационная матрица плотности

Координатная зависимость волновой функции ψ, описывающей свободное движение с импульсом $\mathbf{p}$ (плоская волна), сводится к общему множителю $e^{i\mathbf{pr}}$, а амплитуда u_p играет роль спиновой волновой функции. В таком (чистом) состоянии частица полностью поляризована (см. III, § 59). В нерелятивистской теории это означает, что спин частицы имеет определенное направление в пространстве (точнее, существует такое направление, вдоль которого проекция спина имеет определенное значение $+{}^1/_2$). В релятивистской теории такая характеристика состояния в произвольной системе отсчета невозможна ввиду (отмеченного уже в § 23) несохранения вектора спина. Чистота состояния означает лишь, что спин имеет определенное направление в системе покоя частицы.

В состоянии частичной поляризации не существует определенной амплитуды, а лишь *поляризационная матрица плотности* ρ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$ — биспинорные индексы). Определим эту матрицу таким образом, чтобы в чистом состоянии она сводилась к произведениям

$$\rho_{ik} = u_{pi}\bar{u}_{pk}. \tag{29,1}$$

Соответственно этому матрица ρ нормируется условием

$$\mathrm{Sp}\,\rho = 2m \tag{29,2}$$

(ср. (23,4)).

В чистом состоянии среднее значение спина определяется величиной

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\int \psi^*\boldsymbol{\Sigma}\psi\, d^3x = \frac{1}{4\varepsilon}u_p^*\boldsymbol{\Sigma}u_p = \frac{1}{4\varepsilon}\bar{u}_p\gamma^0\boldsymbol{\Sigma}u_p. \tag{29,3}$$

Соответствующее выражение для состояния частичной поляризации:

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma^0\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma^5\boldsymbol{\gamma}). \tag{29,4}$$

Амплитуды u_p, $\bar{u}_p$ удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m)\,u_p = 0, \quad \bar{u}_p(\gamma p - m) = 0.$$

Поэтому матрица (29,1) удовлетворяет уравнениям

$$(\gamma p - m)\,\rho = \rho\,(\gamma p - m) = 0. \tag{29,5}$$

Таким же линейным уравнениям должна подчиняться матрица плотности и в общем случае смешанного (по спину) состояния (ср. аналогичный вывод в III, § 14).

Если рассматривать свободную частицу в ее системе покоя, то к ней применима нерелятивистская теория. Но в этой теории состояние частичной поляризации полностью определяется тремя параметрами — компонентами вектора среднего значения спина $\bar{\mathbf{s}}$ (см. III, § 59). Ясно поэтому, что те же параметры будут определять поляризационное состояние и после любого преобразования Лоренца, т. е. для движущейся частицы.

Обозначим удвоенное среднее значение вектора спина в системе покоя посредством $\boldsymbol{\zeta}$ (в чистом состоянии $|\boldsymbol{\zeta}|=1$, в смешанном $|\boldsymbol{\zeta}|<1$). Для четырехмерного описания поляризационного состояния удобно ввести 4-вектор a^μ, совпадающий в системе покоя с трехмерным вектором $\boldsymbol{\zeta}$; поскольку $\boldsymbol{\zeta}$ — аксиальный вектор, то a^μ — 4-псевдовектор. Этот 4-вектор ортогонален 4-импульсу в системе покоя (где $a^\mu=(0,\boldsymbol{\zeta})$, $p^\mu=(m,0)$), а потому и в произвольной системе отсчета

$$a^\mu p_\mu = 0. \tag{29,6}$$

В произвольной системе отсчета будет также и

$$a_\mu a^\mu = -\zeta^2. \tag{29,7}$$

Компоненты 4-вектора a^μ в системе отсчета, в которой частица движется со скоростью $\mathbf{v}=\mathbf{p}/\varepsilon$, находятся путем преобразования Лоренца из системы покоя и равны

$$a^0=\frac{|\mathbf{p}|}{m}\zeta_\parallel,\quad \mathbf{a}_\perp=\boldsymbol{\zeta}_\perp,\quad a_\parallel=\frac{\varepsilon}{m}\zeta_\parallel, \tag{29,8}$$

где индексы $\parallel$ и $\perp$ означают компоненты векторов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\mathbf{a}$, параллельные и перпендикулярные направлению $\mathbf{p}$ [1]). Эти формулы можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\zeta}+\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{p})}{m(\varepsilon+m)},\quad a^0=\frac{\mathbf{ap}}{\varepsilon}=\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\zeta}}{m},\quad \mathbf{a}^2=\boldsymbol{\zeta}^2+\frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\zeta})^2}{m^2}. \tag{29,9}$$

Рассмотрим сначала неполяризованное состояние ($\boldsymbol{\zeta}=0$). Матрица плотности в этом случае может содержать в качестве параметров лишь 4-импульс p. Единственный вид такой

[1]) По своим трансформационным свойствам компоненты среднего вектора спина $\bar{\mathbf{s}}$ (как и всякого момента) являются в релятивистской механике пространственными компонентами антисимметричного тензора $S^{\lambda\mu}$. 4-вектор a^λ связан с этим тензором посредством соотношений

$$S^{\lambda\mu}=\frac{1}{2m}e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\nu p_\rho,\qquad a^\lambda=-\frac{2}{m}e^{\lambda\mu\nu\rho}S_{\mu\nu}p_\rho.$$

Подчеркнем, что в произвольной системе отсчета пространственная часть $\mathbf{a}$ 4-вектора a^λ отнюдь не совпадает с вектором $2\bar{\mathbf{s}}$. Легко видеть, что

$$2\bar{s}_\parallel=\frac{1}{m}(a_\parallel\varepsilon-a^0|\mathbf{p}|)=\zeta_\parallel,\qquad 2\bar{\mathbf{s}}_\perp=\frac{\varepsilon}{m}\mathbf{a}_\perp=\frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{\zeta}_\perp.$$

матрицы, удовлетворяющей уравнениям (29,5), есть

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p+m) \tag{29,10}$$

(*И. Е. Тамм*, 1930, *H. B. G. Casimir*, 1933). Постоянный коэффициент выбран в соответствии с нормировочным условием (29,2).

В общем случае частичной поляризации ($\zeta \neq 0$) ищем матрицу плотности в виде

$$\rho=\frac{1}{4m}(\gamma p+m)\rho'(\gamma p+m), \tag{29,11}$$

автоматически удовлетворяющем уравнениям (29,5). При $\zeta \neq 0$ вспомогательная матрица ρ' должна обращаться в единичную; поскольку

$$(\gamma p+m)^2=2m(\gamma p+m),$$

(29,11) совпадет с выражением (29,10). Далее, она должна содержать 4-вектор a линейным образом в качестве параметра, т. е. иметь вид

$$\rho'=1-A\gamma^5(\gamma a); \tag{29,12}$$

во втором члене фигурирует скалярное произведение псевдовектора a и «матричного 4-псевдовектора» $\gamma^5\gamma$. Для определения коэффициента A напишем матрицу плотности в системе покоя:

$$\rho=\frac{m}{4}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta})(1+\gamma^0)=\frac{m}{2}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta}),$$

и вычислим, согласно (29,4), среднее значение спина. Воспользовавшись перечисленными в § 22 правилами, легко найдем, что единственный отличный от нуля член в искомом следе

$$2\bar{\mathbf{s}}=\frac{1}{2m}\operatorname{Sp}(\rho\gamma^5\boldsymbol{\gamma})=-\frac{A}{4}\operatorname{Sp}((\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\gamma})=A\boldsymbol{\zeta}.$$

Приравняв это выражение $\boldsymbol{\zeta}$, получим $A=1$. Окончательное выражение для ρ найдем, подставив (29,12) в (29,11) и переставив множители ρ' и $(\gamma p+m)$; в силу ортогональности a и p произведение γp антикоммутативно с γa:

$$(\gamma a)(\gamma p)=2ap-(\gamma p)(\gamma a)=-(\gamma p)(\gamma a),$$

а потому коммутативно с $\gamma^5(\gamma a)$.

Таким образом, матрица плотности частично поляризованного электрона дается выражением

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p+m)[1-\gamma^5(\gamma a)] \tag{29,13}$$

(*L. Michel, A. S. Wighiman*, 1955). Если матрица ρ известна, то характеризующий состояние 4-вектор a (а с ним и вектор ζ) можно найти по формуле

$$a^{\mu} = \frac{1}{2m} \operatorname{Sp}(\rho\gamma^5\gamma^{\mu}). \tag{29,14}$$

Формулы для матрицы плотности позитрона аналогичны формулам для электрона. Если бы мы описывали позитрон (с 4-импульсом p) позитронной амплитудой $u_p^{(\text{поз})}$ и определенной в соответствии с такой амплитудой матрицей плотности $\rho^{(\text{поз})}$, то никакого отличия от случая электрона вообще не было бы и матрица $\rho^{(\text{поз})}$ давалась бы той же формулой (29,13). Однако при фактических вычислениях сечений процессов рассеяния с участием позитронов приходится иметь дело (как мы увидим в дальнейшем) не с $u_p^{(\text{поз})}$, а с амплитудами «отрицательной частоты» u_{-p}. Соответственно этому и поляризационную матрицу плотности (обозначим ее $\rho^{(-)}$) следует определить так, чтобы для чистого состояния она сводилась к $u_{-pi}\bar{u}_{-pk}$.

Согласно (26,1) позитронная амплитуда $u_p^{(\text{поз})} = U_C\bar{u}_{-p}$. Обратно:

$$u_{-p} = U_C\bar{u}_p^{(\text{поз})}, \quad \bar{u}_{-p} = U_C^+u_p^{(\text{поз})} = u_p^{(\text{поз})}U_C^*$$

(ср. (28,3)). Если

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi}\bar{u}_{-pk}, \quad \rho_{ik}^{(\text{поз})} = u_{pi}^{(\text{поз})}\bar{u}_{pk}^{(\text{поз})},$$

то с помощью этих формул получим

$$\rho^{(-)} = U_C\tilde{\rho}^{(\text{поз})}U_C^*. \tag{29,15}$$

Подставляя сюда для $\rho^{(\text{поз})}$ выражение (29,13) и производя (с помощью (26,3), (26,21)) простые преобразования, получаем

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\gamma p - m)[1 - \gamma^5(\gamma a)]. \tag{29,16}$$

В частности, для неполяризованного состояния

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\gamma p - m). \tag{29,17}$$

В дальнейшем, говоря о позитронных матрицах плотности, мы будем иметь в виду матрицы $\rho^{(-)}$ и индекс (—) у них будем опускать (матрицами же $\rho^{(\text{поз})}$ фактически не приходится пользоваться).

В различных вычислениях нам часто придется усреднять по спиновым состояниям выражения вида $\bar{u}Fu (\equiv \bar{u}_iF_{ik}u_k)$, где F — некоторая (четырехрядная) матрица, а u — биспинорная амплитуда состояния с определенным 4-импульсом p. Такое усреднение эквивалентно замене произведений $u_k\bar{u}_i$ матрицей плотности ρ_{ki} частично поляризованного состояния.

В частности, полное усреднение по двум независимым спиновым состояниям эквивалентно переходу к неполяризованному состоянию; при этом согласно (29,10) имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} \bar{u}_p F u_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma p + m)\,F. \tag{29,18}$$

Аналогично для волновых функций отрицательной частоты

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} \bar{u}_{-p} F u_{-p} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma p - m)\,F. \tag{29,19}$$

Если речь идет не об усреднении, а о суммировании по спиновым состояниям — результат в два раза больше.

Проследим, каким образом матрица плотности (29,13) переходит в пределе в свое нерелятивистское выражение. Для этого перейдем к системе покоя электрона. В стандартном представлении волновых функций амплитуды u_p в этой системе становятся двухкомпонентными; вместе с ними должна стать двухрядной матрица плотности. Действительно, в системе покоя имеем

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1)(1 + \gamma^5\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\zeta}),$$

и с помощью выражений матриц γ (21,20) и (22,18) находим

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\text{нр}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{нр}} = m(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}) \tag{29,20}$$

(нули обозначают двухрядные нулевые матрицы). Если принять обычную в нерелятивистской теории нормировку матрицы плотности на 1 ($\mathrm{Sp}\,\rho_{\text{нр}} = 1$) вместо нормировки на $2m$, то это выражение надо будет разделить на $2m$, так что получится

$$\frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta})$$

в согласии с III (59,6).

Аналогичным образом нерелятивистский предел позитронной матрицы плотности:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{нр}} \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{нр}} = -m(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}).$$

Наконец, напишем упрощенное выражение матрицы плотности в ультрарелятивистском случае. Положив в (29,8) $|\mathbf{p}| \approx \varepsilon$ (тем самым мы пренебрегаем величинами относительной малости $(m/\varepsilon)^2$), подставив эти выражения в (29,13) или (29,16) и выбрав направление $\mathbf{p}$ в качестве оси x, запишем

$$\rho = \frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1) \pm m]\left[1 - \gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0 - \gamma^1)\zeta_\parallel - \boldsymbol{\zeta}_\perp \boldsymbol{\gamma}_\perp\right)\right],$$

где верхний знак относится к случаю электрона, а нижний — к случаю позитрона. При раскрытии произведения главные члены в нем выпадают, а члены следующего порядка дают

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)[1 + \gamma^5(\pm\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp \boldsymbol{\gamma}_\perp)]$$

или, при записи $\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)$ в виде γp:

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p)[1 + \gamma^5(\pm\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp \boldsymbol{\gamma}_\perp)]. \tag{29,21}$$

Это и есть искомое выражение матрицы плотности в ультрарелятивистском случае. Обратим внимание на то, что все компоненты вектора поляризации $\boldsymbol{\zeta}$ входят в него равноправно как члены одного порядка величины. Напомним, что $\zeta_\parallel$ есть компонента этого вектора, параллельная (при $\zeta_\parallel > 0$) или антипараллельная ($\zeta_\parallel < 0$) импульсу частицы. В частности, для спирального состояния частицы $\zeta_\parallel = 2\lambda = \pm 1$; при этом матрица плотности принимает особенно простой вид:

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p)(1 \pm 2\lambda\gamma^5), \tag{29,22}$$

совпадающий, как и должно быть, с видом матрицы плотности нейтрино или антинейтрино — частицы с нулевой массой и определенной спиральностью (см. § 30).

§ 30. Двухкомпонентные фермионы

Мы видели в § 20, что необходимость описания частицы со спином $^1/_2$ двумя спинорами (ξ и η) связана с массой частицы. Эта причина отпадает, если масса равна нулю. Волновое уравнение, описывающее такую частицу, может быть составлено с помощью всего одного, скажем пунктирного, спинора η:

$$p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = 0, \tag{30,1}$$

или, что то же,

$$(\hat{p}_0 + \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta = 0. \tag{30,2}$$

В § 20 было также отмечено, что волновое уравнение, содержащее массу m, автоматически оказывается симметричным по отношению к инверсии (преобразование (20,4)). При описании же частицы одним спинором эта симметрия теряется. В ней, однако, нет необходимости, поскольку симметрия по отношению к инверсии не является универсальным свойством природы.