выбрав направление $\mathbf{p}$ в качестве оси x, запишем

$$\rho=\frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)\pm m]\left[1-\gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0-\gamma^1)\zeta_\parallel-\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp\right)\right],$$

где верхний знак относится к случаю электрона, а нижний — к случаю позитрона. При раскрытии произведения главные члены в нем выпадают, а члены следующего порядка дают

$$\rho=\frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)[1+\gamma^5(\pm\zeta_\parallel+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp)]$$

или, при записи $\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)$ в виде γp:

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p)[1+\gamma^5(\pm\zeta_\parallel+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp)]. \qquad (29,21)$$

Это и есть искомое выражение матрицы плотности в ультрарелятивистском случае. Обратим внимание на то, что все компоненты вектора поляризации $\boldsymbol{\zeta}$ входят в него равноправно как члены одного порядка величины. Напомним, что $\zeta_\parallel$ есть компонента этого вектора, параллельная (при $\zeta_\parallel>0$) или антипараллельная ($\zeta_\parallel<0$) импульсу частицы. В частности, для спирального состояния частицы $\zeta_\parallel=2\lambda=\pm1$; при этом матрица плотности принимает особенно простой вид:

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p)(1\pm 2\lambda\gamma^5), \qquad (29,22)$$

совпадающий, как и должно быть, с видом матрицы плотности нейтрино или антинейтрино — частицы с нулевой массой и определенной спиральностью (см. § 30).

§ 30. Двухкомпонентные фермионы

Мы видели в § 20, что необходимость описания частицы со спином $1/2$ двумя спинорами (ξ и η) связана с массой частицы. Эта причина отпадает, если масса равна нулю. Волновое уравнение, описывающее такую частицу, может быть составлено с помощью всего одного, скажем пунктирного, спинора η:

$$p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}=0, \qquad (30,1)$$

или, что то же,

$$(\hat p_0+\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta=0. \qquad (30,2)$$

В § 20 было также отмечено, что волновое уравнение, содержащее массу m, автоматически оказывается симметричным по отношению к инверсии (преобразование (20,4)). При описании же частицы одним спинором эта симметрия теряется. В ней, однако, нет необходимости, поскольку симметрия по отношению к инверсии не является универсальным свойством природы.

Энергия и импульс частицы с $m=0$ связаны соотношением $\varepsilon=|\mathbf{p}|$. Поэтому для плоской волны ($\eta_p \infty e^{-ipx}$) уравнение (30,2) дает

$$(\mathbf{n}\sigma)\eta_p = -\eta_p, \tag{30,3}$$

где $\mathbf{n}$ — орт вектора $\mathbf{p}$. Такое же уравнение

$$(\mathbf{n}\sigma)\eta_{-p} = -\eta_{-p} \tag{30,4}$$

имеет место и для волны с «отрицательной частотой» ($\eta_{-p} \infty e^{ipx}$).

Вторично квантованный ψ-оператор:

$$\hat{\eta} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\eta_p \hat{a}_{\mathbf{p}} + \eta_{-p}\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\right), \qquad \hat{\eta}^+ = \sum_{\mathbf{p}} \left(\eta^*_p \hat{a}^+_{\mathbf{p}} + \eta^*_{-p}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right). \tag{30,5}$$

Отсюда, как обычно, следует, что η^*_{-p} — волновые функции античастицы.

Из определения операторов $\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}}$ (20,1) видно, что $\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}*} = -\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}$. Поэтому комплексно-сопряженный спинор η^* удовлетворяет уравнению $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}\eta^*_{\dot{\beta}}=0$, или, что то же,

$$\hat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\eta^{\dot{\beta}*}=0.$$

Обозначим $\eta^{\dot{\beta}*}=\xi^{\beta}$, выразив этим тот факт, что комплексное сопряжение превращает пунктирный спинор в непунктирный. Таким образом, волновые функции античастицы удовлетворяют уравнению

$$\hat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\xi^{\beta}=0, \tag{30,6}$$

или

$$(\hat{p}_0 - \hat{\mathbf{p}}\sigma)\xi = 0. \tag{30,7}$$

Для плоской волны имеем отсюда

$$(\mathbf{n}\sigma)\xi_p = \xi_p. \tag{30,8}$$

Но $^1/_2\,\mathbf{n}\sigma$ есть оператор проекции спина на направление движения. Поэтому уравнения (30,3) и (30,8) означают, что состояния частицы с определенным импульсом автоматически оказываются спиральными — проекция спина вдоль направления движения имеет в них определенное значение. При этом, если спин частицы противоположен импульсу (спиральность $-^1/_2$), то спин античастицы направлен вдоль импульса (спиральность $+^1/_2$).

Частицами с такими свойствами являются, возможно, существующие в природе *нейтрино*. При этом частицу со спиральностью $-{}^1/_2$ условно принято называть нейтрино, а частицу со спиральностью $+{}^1/_2$ — антинейтрино[1]).

В связи с невырожденностью состояний нейтрино по направлениям спина напомним сделанное в § 8 замечание о том, что частице с массой 0 свойственна лишь аксиальная симметрия относительно направления импульса. В случае истинно нейтральной частицы — фотона — в эту симметрию входят как вращения вокруг оси, так и отражения в проходящих через ось плоскостях. В случае же нейтрино симметрия относительно отражений отсутствует, и мы имеем дело лишь с группой вращений вокруг оси, сохраняющей проекцию момента на ось, но не меняющей ее знака. Симметрия относительно отражений существует лишь при условии одновременной замены частицы античастицей.

Надо также отметить, что обязательная продольная поляризация означает, что у нейтрино спин вообще не отделим от орбитального момента (как и у фотона с обязательной поперечностью полей, см. § 6).

С помощью одного спинора η (или ξ) можно образовать всего четыре билинейные комбинации, составляющие вместе 4-вектор

$$j^{\mu} = (\eta^*\eta,\ \eta^*\sigma\eta). \tag{30,9}$$

Легко проверить, что в силу уравнений

$$(\hat{p}_0 + \hat{\mathbf{p}}\sigma)\eta = 0, \qquad \eta^*(\hat{p}_0 - \hat{\mathbf{p}}\sigma) = 0$$

имеет место уравнение непрерывности $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$, т. е. j^{μ} играет роль 4-вектора плотности тока частиц.

Плоские волны нейтрино удобно нормировать способом, аналогичным тому, как это было сделано в § 23 для частиц с массой:

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}, \qquad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}, \tag{30,10}$$

причем спинорные амплитуды нормированы инвариантным условием

$$u^*_{\pm p}(1,\ \sigma)u_{\pm p} = 2(\varepsilon,\ \mathbf{p}). \tag{30,11}$$

При этом плотность частиц и плотность их тока: $j^0 = 1$, $\mathbf{j} = \mathbf{p}/\varepsilon = \mathbf{n}$.

---

[1]) Существование нейтрино было предсказано теоретически *Паули* для объяснения свойств β-распада (1931). Уравнение (30,1) впервые рассматривалось *Вейлем* (*H. Weyl*, 1929). Основанную на этих уравнениях теорию нейтрино сформулировали *Л. Д. Ландау*; *Ли*, *Янг* и *Салам* (*T. D. Lee*, *C. N. Yang*, *A. Salam*) в 1957 г.

Экспериментально вопрос о равенстве нулю массы нейтрино до настоящего времени не выяснен окончательно. В дальнейшем мы будем употреблять термин «нейтрино» условно для обозначения частицы, описываемой уравнением (30,3).

Поскольку свободное нейтрино с заданным импульсом всегда полностью поляризовано, в этом случае не существует понятия о смешанном (по спину) состоянии. Тем не менее может оказаться удобным ввести двухрядную поляризационную «матрицу плотности», определенную просто как спинор второго ранга

$$\rho_{\alpha\beta} = u_\alpha u^*_\beta \tag{30,12}$$

(при этом $\mathrm{Sp}\,\rho = 2\varepsilon$). Выражение для этой матрицы можно написать, заметив, что она должна удовлетворять уравнениям

$$(\varepsilon + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\,\rho = \rho\,(\varepsilon + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Отсюда видно, что

$$\rho = \varepsilon - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}. \tag{30,13}$$

При рассмотрении различных процессов взаимодействия нейтрино могут фигурировать наряду с другими частицами (со спином $1/2$), обладающими массой и поэтому описывающимися четырехкомпонентными волновыми функциями. В таких случаях удобно соблюсти единообразие обозначений, введя формально и для нейтрино «биспинорную» волновую функцию, две из компонент которой, однако, равны нулю: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Но такая форма ψ, вообще говоря, нарушится при переходе к другому (не спинорному) представлению. Это затруднение можно обойти, заметив, что в спинорном представлении имеем тождественно

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (\eta^* \ \xi^*)\,\frac{1-\gamma^5}{2} = (\eta^* \ 0),$$

где ξ — произвольный «балластный» спинор, выпадающий из ответа (матрица γ^5 из (22,18)). Поэтому условие истинной «двухкомпонентности» нейтрино будет соблюдено при описании его четырехкомпонентным ψ в любом представлении, если понимать под ψ решение уравнения Дирака с $m = 0$:

$$(\gamma p)\,\psi = 0, \tag{30,14}$$

подчиненное дополнительному условию $1/2(1+\gamma^5)\psi = \psi$, или

$$\gamma^5\psi = \psi. \tag{30,15}$$

Это условие можно учесть, условившись производить во всех формулах, куда входят ψ и $\bar\psi$, следующую замену:

$$\psi \to \frac{1+\gamma^5}{2}\psi, \qquad \bar\psi \to \bar\psi\,\frac{1-\gamma^5}{2}. \tag{30,16}$$

Так, 4-вектор плотности тока запишется в виде (замена (30,16) в выражении $\bar\psi\gamma^\mu\psi$)

$$j^\mu = \frac{1}{4}\bar\psi(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi. \tag{30,17}$$

В соответствии с этим же правилом четырехрядная матрица плотности нейтрино должна быть записана как

$$\rho = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)(\gamma p)(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)(\gamma p). \qquad (30,18)$$

В спинорном представлении она сводится, как и должно быть, к двухрядной матрице (30,13)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon - \sigma p & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные формулы для антинейтрино отличаются от написанных изменением знака перед γ^5.

Нейтрино — электрически нейтральная частица. Нейтрино с описанными выше свойствами не является, однако, истинно нейтральной частицей. Отметим в этой связи, что «нейтринное поле», описываемое двухкомпонентным спинором, по числу возможных для него состояний частиц (но, разумеется, не по другим своим физическим свойствам) эквивалентно истинно нейтральному полю, описываемому четырехкомпонентным биспинором. Вместо состояний частиц и античастиц с определенными спиральностями здесь имелось бы столько же состояний одной частицы с двумя возможными значениями спиральности и автоматически соблюдалась бы симметрия по отношению к инверсии. Отметим, однако, что равенство нулю массы «четырехкомпонентного» нейтрино имело бы, так сказать, «случайный» характер, поскольку оно не было бы связано со свойствами симметрии описывающего его волнового уравнения (допускающего также и отличную от нуля массу). Поэтому учет различных взаимодействий такой частицы автоматически привел бы к появлению хотя и малой, но все же не равной строго нулю массы покоя.

§ 31. Волновое уравнение для частицы со спином 3/2

Частица со спином $^3/_2$ описывается в своей системе покоя симметричным 3-спинором третьего ранга (с $2s+1=4$ независимыми компонентами). Соответственно в произвольной системе отсчета в ее описании могут участвовать 4-спиноры $\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}}$, $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ и $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot{\alpha}\beta\dot{\gamma}}$, каждый из которых симметричен по всем одинаковым (пунктирным или непунктирным) индексам; при инверсии спиноры в первой и во второй паре переходят друг в друга.

Для того чтобы в системе покоя 4-спиноры $\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}}$ и $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ переходили в 3-спиноры, симметричные по всем трем индексам, они должны удовлетворять условиям

$$p^{\dot{\alpha}\beta}\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma} = 0, \qquad p_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}} = 0. \qquad (31,1)$$